

EINE GRENZE FÜR DIE HERLEITBARKEIT DER
TRANSFINITEN INDUKTION IN EINEM SCHWACHEN
 Π_1^1 -FRAGMENT DER KLASSISCHEN ANALYSIS

Wolfram Pohlers

1973



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554601_0061

EINE GRENZE FÜR DIE HERLEITBARKEIT DER TRANSFINI-
TEN INDUKTION IN EINEM SCHWACHEN Π_1^1 -FRAGMENT DER
KLASSISCHEN ANALYSIS

Inauguraldissertation zur Erlangung des
Doktorgrades der Fakultät für Mathematik
an der Ludwigs-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von
Wolfram Pohlers
aus München
im Mai 1973

1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Schütte
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. J. Diller
- Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juni 1973



Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	I
Kapitel I.	1
Die Ordinalzahlbezeichnungssysteme $\Sigma(N)$, $\Sigma'(N)$ und Σ .	
Kapitel II.	
Schnittelimination in einem halbformalen System	
Π^* eines Fragments der Analysis	
§1. Das halbformale System Π^*	7
§2. Herleitungseigenschaften von Π^*	12
§3. Normalherleitungen	18
§4. Eigenschaften von Normalherleitungen	25
§5. Reduzible Normalherleitungen	27
Kapitel III.	
Eine Grenze für die Herleitbarkeit der trans- finiten Induktion im schwachen Π_1^1 Fragment der Analysis	
§1. Das formale System Π	42
§2. Widerspruchsfreiheit von Π	44
§3. Unbeweisbarkeit der transfiniten Induk- tion bis σ_0 in Π und Π^*	46
§4. Beweisbarkeit der transfiniten Induktion bis zu jeder Ordinalzahl $< \sigma_0$ in Π	49
Literaturverzeichnis	69

Einleitung

G. TAKEUTI hat in [1] die Widerspruchsfreiheit eines Π_1^1 -Fragments der klassischen Analysis mit Hilfe einer transfiniten Induktion über seine Ordinaldiagramme gezeigt, deren Wohlordnungsbeweis er in [10] angegeben hat. Vom Standpunkt der klassischen Ordinalzahltheorie aus war dabei jedoch nicht so recht zu sehen, welche Ordinalzahlen durch die Ordinaldiagramme bezeichnet werden. SCHÜTTE hat nun in [5] ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen, aufbauend auf Normalfunktionen, angegeben, von dem LEVITZ und dann in vereinfachter Form LEVITZ und SCHÜTTE [6] nachweisen konnten, dass es äquivalent zu den Ordinaldiagrammen endlicher Ordnung ist. Zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Π_1^1 -Analysis reichen die Ordinaldiagramme endlicher Ordnung allerdings nicht aus. Schränkt man neben der Komprehension auch noch die vollständige Induktion auf Π_1^1 -Formeln ein, so folgt aus [1], dass dann die Widerspruchsfreiheit dieses 'schwachen Π_1^1 -Fragments' bereits mit Hilfe der Ordinaldiagramme endlicher Ordnung zu zeigen ist. Aus GÖDEL's zweitem Satz folgt dann, dass die benutzte Wohlordnung in dem betrachteten Fragment nicht mehr nachgewiesen werden kann. Nun liegt es auf der Hand, danach zu fragen, welche Wohlordnungen noch nachgewiesen werden können und ob sich eine scharfe Grenze für die Beweisbarkeit von Wohlordnungen angeben lässt.

In der vorliegenden Arbeit verfolgen wir das Ziel, eine solche scharfe Grenze anzugeben und benützen dabei die von SCHÜTTE und PFEIFFER [8] angegebenen Bezeichnungssysteme. Der erste Schritt zur Bestimmung einer scharfen Grenze besteht darin, zunächst

einmal nachzuweisen, dass die Wohlordnung oder, wie wir es hier tun werden, die transfinite Induktion für eine gewisse Ordinalzahl in unserem Fragment nicht mehr beweisbar ist. Nach dem eben geschilderten bietet sich dafür einmal der zweite GÖDEL'sche Satz an. Eine korrekte Anwendung des Satzes verlangt aber eine strenge Formalisierung der Widerspruchsfreiheitsbeweises in dem betrachteten Fragment, erweitert um die benötigte Induktion. Eine solche Formalisierung müsste zwar möglich sein, erforderte aber doch einigen technischen Aufwand. Wir benützen daher hier eine Methode die auf GENTZEN zurückgeht und von SCHÜTTE [3],[4] verbessert wurde. Der Beweisgang ist dabei im wesentlichen der folgende: Wir betten ein formales System Π der schwachen Π_1^1 -Analysis in ein halbformales System Π^* ein (III.§1), indem wir die vollständige Induktion durch die Regel der 'unendlichen Induktion' mit unendlich vielen Prämissen ersetzen (II.§1)(Diese Regel ist auch als ω -Regel bekannt). Den so entstehenden unendlichen Bäumen ordnen wir Ordinalzahlen eines Bezeichnungssystems Σ zu, die im wesentlichen die 'Tiefe' des Herleitungsbaumes messen. Mit Hilfe eines Reduktionsverfahrens, das auf TAKEUTI zurückgeht, können wir dann Schnitte in diesen Herleitungsbäumen eliminieren, wobei allerdings die 'Tiefe' dieser Bäume zunimmt (II.§5). Dabei erhalten wir gleichzeitig einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für Π^* und Π (III.§1). Endlich zeigen wir, dass die Tiefe einer schnittfreien Herleitung der transfiniten Induktion bis zu einer Ordinalzahl in einem gewissen Sinne grösser als diese Ordinalzahl ist (III.§2). Da die 'Tiefen' der Herleitungen immer kleiner als eine, von uns σ_0 genannte Ordinalzahl sind, folgt daraus, dass die transfinite Induktion bis σ_0 in Π^* und damit auch in Π nicht beweisbar ist.

Um einzusehen, dass diese Grenze auch scharf ist, hat man nachzuweisen, dass für jede kleinere Ordinalzahl die transfinite Induktion in Π bewiesen werden kann. Wir verwenden dazu den von SCHÜTTE in [5] angegebenen Beweis, den wir mit ähnlichen Methoden, wie sie in [4] verwendet werden, in Π formalisieren. Dabei erweist sich σ_0 tatsächlich als scharfe Grenze. Dieser Beweis ist wesentlich imprädikativ und benützt die Methode der 'verallgemeinerten induktiven Definition'. Da diese induktiven Definitionen immer nur endlich oft mal geschachtelt werden müssen, ist es möglich, den benötigten Prozess in dem hier betrachteten System darzustellen (III.§3.2), obwohl uns keine formale Regel für iterierte induktive Definitionen zur Verfügung steht. Hier liegt auch die Schwierigkeit, wenn man diese Überlegungen auf das Π_1^1 -Fragment mit uneingeschränkter vollständiger Induktion übertragen will. Man kann den ersten Beweisschritt ohne weiteres übertragen, hat dabei aber zu einem stärkeren Bezeichnungssystem, etwa zu $W(\omega+1)$ von [9], überzugehen. Dann ist aber für die Abschätzung von unten her, eine ω -fach iterierte induktive Definition nötig. FEFERMAN hat jedoch in [2] gezeigt, dass eine Π_1^1 -Komprehension dafür alleine noch nicht ausreicht. Von daher ist es unter Umständen möglich, dass überhaupt keine scharfe Grenze angebbar ist.

Abschliessend wollen wir noch bemerken, dass sich σ_0 grob als der Ordnungstyp des grössten lückenlosen Abschnitts der zweiten Zahlenklasse charakterisieren lässt, der sich mit den Methoden von SCHÜTTE [5] und PFEIFFER [9] unter Zuhilfenahme aller endlichen Zahlenklassen bezeichnen lässt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. K. Schütte für die Anregung zu dieser Arbeit und ihm und den übrigen Mitarbeitern der Abteilung für mathematische Logik für die Ermutigungen, die ich von ihnen im Verlaufe dieser Arbeit erhalten habe.

Technische Bemerkungen:

Die Arbeit ist nach Kapiteln, Paragraphen und Abschnitten gegliedert. Die Lemmata und Sätze eines jeden Paragraphen sind fortlaufend nummeriert. Hinweise, die nur die fortlaufende Nummer tragen, beziehen sich auf den selben Paragraphen, Hinweise mit Paragraphenbezifferung auf das selbe Kapitel. Die römische Ziffer vor einem Hinweis bezieht sich dann auf das so bezifferte Kapitel.

KAPITEL I

Die Ordinalzahlbezeichnungssysteme $\Sigma(N)$, $\Sigma'(N)$ und Σ

Im folgenden sei N eine fest vorgegebene natürliche Zahl.

1. Induktive Definition der Terme von $\Sigma(N)$

1.1 Für $0 \leq k \leq N$ ist Ω_k ein Term von $\Sigma(N)$.

1.2 Sind α und β Terme von $\Sigma(N)$, so ist auch (α, β) und $\alpha * \beta$ ein Term von $\Sigma(N)$.

2. Hauptterme

Alle Terme α , die nicht die Gestalt $\alpha * \beta$ oder Ω_0 haben, heissen Hauptterme.

3. Induktive Definition des Grades $g\alpha$ eines Termes α

3.1 $g\Omega_0 = 0$

3.2 $g\Omega_k = 1$ für $1 \leq k \leq N$

3.3 $g(\alpha, \beta) = g\alpha + g\beta + 1$

3.4 $g(\alpha * \beta) = g\alpha + g\beta + 1$

4. Induktive Definition der Komponenten eines Termes

4.1 Ω_0 hat keine Komponenten.

4.2 Jeder Hauptterm hat nur sich selbst als Komponente.

4.3 Hat α die Komponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β die Komponenten $\beta_1, \dots, \beta_m$, so hat $\alpha * \beta$ die Komponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$.

5. Induktive Definition der Gleichheit von Termen

5.1 Haben α und β keine Komponenten, so gilt $\alpha = \beta$.

5.2 $\Omega_k = \Omega_k$ für $1 \leq k \leq N$.

5.3 Aus $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 = \beta_2$ folgt $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)$.

5.4 Haben α und β die Komponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bzw. $\beta_1, \dots, \beta_n$ und ist π eine Permutation der Zahlen $1, \dots, n$, so dass

$\alpha_j = \beta_{\pi(j)}$ gilt, so ist $\alpha = \beta$.

6. Induktive Definition der Stufe $S\alpha$ eines Termes α

6.1 $S\Omega_k = k$ für $0 \leq k \leq N$.

6.2 $S(\alpha, \beta) = S\beta$.

6.3 $S(\alpha \# \beta) = \max(S\alpha, S\beta)$

7. Induktive Definition der k -Koeffizientenmenge $K_k \alpha$ eines

Termes α

7.1 $K_k \Omega_0 = \emptyset$ für $0 \leq k \leq N$.

7.2 Ist α ein Hauptterm mit $S\alpha \leq k \leq N$, so ist $K_k \alpha = \{\alpha\}$.

7.3 Ist $k < 1$, so ist $K_k \Omega_1 = \emptyset$.

7.4 Ist $k < S\beta$, so ist $K_k(\alpha, \beta) = K_k \alpha \cup K_k \beta$.

7.5 $K_k(\alpha \# \beta) = K_k \alpha \cup K_k \beta$ für $0 \leq k \leq N$.

$K_k \alpha$ ist für alle Terme α eine endliche, eventuell leere Menge von Haupttermen γ , für die $S\gamma \leq k$ und $g\gamma \leq g\alpha$ ist.

8. Induktive Definition der Relation $\alpha < \beta$

8.1 Ist $k < S\beta$, so ist $\Omega_k < (\alpha, \beta)$.

8.2 Ist α ein Hauptterm mit $S\alpha < k$, so ist $\alpha < \Omega_k$.

8.3 Ist $S\alpha_2 = S\beta_2 = k$, so gilt $(\alpha_1, \alpha_2) < (\beta_1, \beta_2)$ genau dann, wenn einer der drei folgenden Fälle vorliegt:

8.3.1 $\alpha_1 < \beta_1$ und $K_k \alpha_1 \cup \{\alpha_2\} < (\beta_1, \beta_2)$ (d.h.: Alle Elemente von $K_k \alpha_1$ und α_2 sind kleiner als (β_1, β_2)),

8.3.2 $\alpha_1 = \beta_1$ und $\alpha_2 < \beta_2$,

8.3.3 $\beta_1 < \alpha_1$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \leq K_k \beta_1 \cup \{\beta_2\}$ (d.h.: Es gibt ein Element γ aus $K_k \beta_1$ mit $(\alpha_1, \alpha_2) \leq \gamma$, oder es ist $(\alpha_1, \alpha_2) \leq \beta_2$).

8.4 Ist α oder β kein Hauptterm, so gilt $\alpha < \beta$ genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

8.4.1 Es gibt eine Komponente β_j von β , so dass für alle Komponenten α_i von α $\alpha_i < \beta_j$ gilt,

8.4.2 es gibt Terme α_0, β_0 und einen Hauptterm γ , so dass $\alpha = \alpha_0 \# \gamma$, $\beta = \beta_0 \# \gamma$ und $\alpha_0 < \beta_0$ ist.

Satz 1: Die Gleichheit von Termen ist eine primitiv rekursive, mit den Operationen $(,)$, $\#$, g , S , K_k und $<$ verträgliche Äquivalenzrelation.

Satz 2: Die Äquivalenzklassen gleicher Terme werden durch die Relation $<$ wohlgeordnet.

9. Induktive Definition der Terme von $\Sigma'(N)$

9.1 Für $0 \leq k \leq N$ ist Ω_k ein Term von $\Sigma'(N)$.

9.2 Sind α und β Terme von $\Sigma'(N)$ und ist $S\alpha \leq S\beta + 1$, so ist (α, β) ein Term von $\Sigma'(N)$. (Dabei ist $S\alpha$ wie in $\Sigma(N)$ erklärt.)

9.3 Sind α und β Terme von $\Sigma'(N)$, so ist auch $\alpha \# \beta$ ein Term von $\Sigma'(N)$.

11. $\Sigma'(N)$ ist ein Teilsystem von $\Sigma(N)$. Die Sätze 1 und 2 gelten ebenso für $\Sigma'(N)$. Während die Menge $\cup \{ \Sigma(N) : N \in \mathbb{N} \}$ nicht wohlgeordnet ist, lässt sich zeigen, dass die Menge $\Sigma := \cup \{ \Sigma'(N) : N \in \mathbb{N} \}$ wohlgeordnet ist [8]. Für unsere Zwecke genügen die Bezeichnungssysteme $\Sigma'(N)$. Wir wollen uns daher im folgenden auf sie beschränken.

12. Eigenschaften der Terme von $\Sigma'(N)$

12.1 Aus $\alpha < \beta$ folgt $S\alpha \leq S\beta$.

12.2 $\alpha < \Omega_k$ gilt genau dann, wenn $S\alpha < k$ ist, und $\Omega_k \leq \alpha$ genau dann, wenn $k \leq S\alpha$ ist.

12.3 $\beta < (\alpha, \beta)$.

12.4 $K_k \alpha \leq \alpha$ für $S\alpha = k$.

12.5 $K_k \alpha < (\alpha, \beta)$ für $S\alpha = k$.

12.6 Aus $\alpha \leq K_k \beta_1 \cup \{ \beta_2 \}$ mit $k = S\beta_2$ folgt $\alpha < (\beta_1, \beta_2)$.

12.7 Für $\alpha \neq \Omega_0$ gilt $\beta < \alpha \# \beta$ und $\beta < \beta \# \alpha$.

13. Induktive Definition von $[\alpha; k]$ für einen Term α

13.1 Ist $S\alpha \leq k$, so ist $[\alpha; k] = \alpha$.

13.2 Ist $k < S\alpha$, so ist $[\alpha; k] = ([\alpha; k+1], \Omega_k)$.

14. Folgerungen

14.1 $[\alpha; k]$ ist ein Term aus $\Sigma'(N)$, falls α aus $\Sigma'(N)$ ist.

14.2 $S[\alpha; k] = k$

14.3 Aus $k < 1$ folgt $K_k[\alpha; 1] = K_k\alpha$.

14.4 Gilt $K_k\alpha < [\beta; k]$ für $1 \leq k \leq S\alpha$, so folgt $[\alpha; 1] < [\beta; 1]$.

15. Induktive Definition von $\bar{n}$ für jede natürliche Zahl n

15.1 $\bar{0} = \Omega_0$

15.2 $\overline{(n+1)} = \bar{n} * (\Omega_0, \Omega_0)$.

15.4 Folgerung: Es gilt $n < m$ genau dann, wenn $\bar{n} < \bar{m}$ gilt.

Im folgenden wollen wir die oberen Querstriche fortlassen und natürliche Zahlen mit den eben definierten Termen identifizieren, falls dies nicht zu Missverständnissen führen kann. Wir werden auch im folgenden immer 0 für Ω_0 schreiben.

16. Für $0 \leq k \leq N$ gilt $K_k\alpha < [(n, \alpha * \beta); k]$.

Beweis: Für $k = N$ folgt dies sofort aus 12.7 und 12.3, für $k < N$ aus 14.3 und 12.6.

17. Für $0 \leq k \leq 1 \leq N$ gilt $[\alpha; k] < [(0, [\alpha; 1] * \Omega_N); k]$.

Beweis: Nach 14.4 ist $K_k[(0, [\alpha; 1] * \Omega_N); k+1] = K_k[\alpha; 1]$. Ist $k = 1$, so ist $K_k[\alpha; 1] = \{[\alpha; 1]\}$ und damit $[\alpha; 1] \leq K_k[(0, [\alpha; 1] * \Omega_N); k+1] \cup \{\Omega_k\}$. Nach 12.6 folgt daraus die Behauptung. Ist $k < 1$, so ist $K_k[\alpha; 1] = K_k\alpha$, und damit $K_k\alpha \leq K_k[(0, [\alpha; 1] * \Omega_N); k+1] \cup \{\Omega_k\}$. Nach 12.6 folgt daraus $K_k\alpha < [(0, [\alpha; 1] * \Omega_N); k]$ für $0 \leq k \leq 1$. Nach 14.4 folgt damit die Behauptung.

18. Induktive Definition von $R\alpha$ für $\alpha \in \Sigma$

18.1 $R\Omega_k = k$

18.2 $R(\alpha, \beta) = R(\alpha \# \beta) = \max(R\alpha, R\beta)$

Folgerung:

18.3 Aus $R\alpha = N$ folgt $\alpha \in \Sigma'(N)$.

19. Induktive Definition der Abbildung $*, \Sigma'(N) \rightarrow \Sigma'(N+1)$

19.1 $0* = 0$

19.2 $\Omega_k^* = \Omega_{k+1}$ für $1 \leq k \leq N$

19.3 $(\alpha, \beta)^* = (\alpha^*, \beta^*)$

19.4 $(\alpha \# \beta)^* = \alpha^* \# \beta^*$

20. Folgerungen:

20.1 Für $\alpha \in \Sigma'(0)$ ist $\alpha^* = \alpha$.

20.2 Aus $S\alpha = 0$ folgt $S\alpha^* = 0$ und aus $S\alpha \neq 0$ folgt $S\alpha^* = S\alpha + 1$.

20.3 Es ist $[\alpha; 0]^* = [\alpha^*; 0]$ und $[\alpha; k]^* = [\alpha^*; k+1]$ für $1 \leq k \leq N$.

20.4 Es ist $K_0\alpha^* = (K_0\alpha)^*$, $K_1\alpha^* = \emptyset$ und $(K_k\alpha)^* = K_{k+1}\alpha^*$ für $1 \leq k \leq N$.

20.5 Aus $\alpha < \beta$ folgt $\alpha^* < \beta^*$.

20.6 Gilt $K_k\alpha < [\alpha; k]$ für $0 \leq k \leq N$, so folgt $K_k\alpha^* < [\alpha^*; k]$ für $0 \leq k \leq N+1$.

21. Ist $N_1 < N_2$, so lässt sich jeder Term von $\Sigma'(N_1)$ durch $N_2 - N_1$ faches Anwenden der $*$ -Abbildung auf einen Term von $\Sigma'(N_2)$ abbilden. Wir wollen diese iterierte Abbildung ebenfalls mit $*$ kennzeichnen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher Definitionsbereich und welcher Wertebereich gemeint ist. Ist $n = N_2 - N_1$ so ergeben sich aus 20.

21.1 Für $\alpha \in \Sigma'(0)$ ist $\alpha^* = \alpha$.

21.2 Aus $S\alpha = 0$ folgt $S\alpha^* = 0$ und aus $S\alpha \neq 0$ folgt $S\alpha^* = S\alpha + n$.

21.3 Es ist $[\alpha; 0]^* = [\alpha^*; 0]$ und $[\alpha; k]^* = [\alpha^*; k+n]$ für $1 \leq k \leq N$.

21.4 Es ist $K_0\alpha^* = (K_0\alpha)^*$, $K_j\alpha^* = \emptyset$ für $1 \leq j \leq n$ und $K_{k+n}\alpha^* = (K_k\alpha)^*$ für $n \leq k \leq N_1$.

21.5 Aus $K_k \alpha < [\beta; k]$ für $0 \leq k \leq N_1$ folgt $K_k \alpha^* < [\beta^*; k]$ für $0 \leq k \leq N_2$.

Wir zitieren noch einen Satz:

Die Terme der Stufe 0 von $\Sigma'(N)$ bilden einen Abschnitt von $\Sigma'(N+1)$.

Der Beweis hierzu ergibt sich aus [5] Lemma 38.

Den Ordnungstyp der Terme der Stufe 0 von Σ bezeichnen wir mit σ_0 .

KAPITEL II

Schnittelimination in einem halbformalen System Π^* eines Fragmentes der Analysis

§1. Das halbformale System Π^*

1. Grundzeichen

1.1 Abzählbar unendlich viele freie I-Variablen (Individuenvariablen), mitgeteilt durch a, b, u und v .

1.2 Abzählbar unendlich viele gebundene I-Variablen, mitgeteilt durch x, y und z .

1.3 Zeichen für primitiv rekursive Funktionen einer Stellenzahl $n \geq 0$.

1.4 Zeichen für primitiv rekursive Prädikate einer Stellenzahl $n \geq 1$.

1.5 Zu jeder Stellenzahl $n \geq 0$ abzählbar unendlich viele freie P-Variablen (Prädikatenvariablen), mitgeteilt durch U^n und V^n .

1.6 Zu jeder Stellenzahl $n \geq 0$ abzählbar unendlich viele gebundene P-Variablen, mitgeteilt durch X^n, Y^n und Z^n .

1.7 Die logischen Zeichen $\neg, \forall, \lambda$ und ε .

1.8 Runde Klammern.

Alle Mitteilungszeichen werden natürlich auch mit Indizes gebraucht. Als freie Variablen bezeichnen wir freie I- und P-Variablen. Wir teilen freie Variablen durch α und β mit. Gebundene I- und P-Variablen heissen auch gebundene Variablen und werden durch ξ und ζ mitgeteilt.

2. Wir definieren Nennformen in der üblichen Weise und teilen sie durch grosse gotische Buschstabe oder abgekürzte Wörter mit.

3. Induktive Definition der I-Terme (Individuenterme)

3.1 Jede freie I-Variable ist ein I-Term.

3.2 Ist f^n ein Zeichen für eine n-stellige primitiv rekursive Funktion ($n \geq 0$) und sind $t_1, \dots, t_n$ I-Terme, so ist auch $f^n(t_1, \dots, t_n)$ ein I-Term.

Wir teilen I-Terme durch s und t mit.

4. Induktive Definition der Formeln und F-Terme (Prädikaterterme)

4.1 Jede n-stellige freie F-Variable und jedes Zeichen für ein n-stelliges primitiv rekursives Prädikat ist ein n-stelliger F-Term.

4.2 Sind $t_1, \dots, t_n$ I-Terme und ist f^n ein n-stelliger F-Term ($n \geq 0$), so ist $t_1, \dots, t_n \in T^n$ eine Formel.

4.3 Sind F_1 und F_2 Formeln, so ist auch $F_1 \rightarrow F_2$ eine Formel.

4.4 Ist $\exists[u]$ bzw. $\exists[X^n]$ eine Formel, in der die gebundene Variable x bzw. X^n nicht auftritt, so sind auch $\forall x \exists[x]$ und $\forall X^n \exists[X^n]$ Formeln. x und X^n heissen dann die, durch den I-Quantor bzw. F-Quantor in $\forall x \exists[x]$ bzw. $\forall X^n \exists[X^n]$ gebundenen Variablen. Ein F-Quantor Q_1 beeinflusst einen F-Quantor Q_2 , wenn die durch Q_1 gebundene Variable im Bereich von Q_2 steht. Ein F-Quantor heisst einfach, wenn er weder einen anderen F-Quantor beeinflusst, noch selbst von einem anderen F-Quantor beeinflusst wird. Eine Formel heisst einfach, wenn jeder in ihr auftretende F-Quantor einfach ist.

4.5 Ist $\exists[u_1, \dots, u_n]$ ($n \geq 0$) eine einfache Formel, in der die paarweise verschiedenen gebundenen I-Variablen $x_1, \dots, x_n$ nicht auftreten, so ist $\lambda x_1 \dots \lambda x_n \exists[u_1, \dots, u_n]$ ein n-stelliger F-Term.

Insbesondere ist also jede einfache Formel ein 0-stelliger F-Term.

Primformeln sind Formeln der Gestalt $t_1, \dots, t_n \in F^n$, wobei F^n entweder eine freie F-Variable oder ein Zeichen für ein primitiv-rekursives Prädikat ist.

Die Formel $\neg A$ steht als Abkürzung für die Formel $A \rightarrow 0 = 1$

Wir teilen Formeln durch A, B, F und G, P-Terme durch T mit. Als Terme bezeichnen wir P- und I-Terme und schreiben τ , wenn beide Arten gemeint sind.

Als Länge einer Formel bezeichnen wir die Anzahl der in ihr auftretenden logischen Zeichen $\rightarrow$, $\forall$ und λ . Wir kürzen diese Zahl mit $l(F)$ ab.

Lemma 1. Ist $\mathfrak{F}[U]$ eine einfache Formel, so ist für jeden P-Term T auch $\mathfrak{F}[T]$ eine einfache Formel.

Der Beweis erfolgt leicht durch Induktion nach der Länge von F und findet sich in [1].

5. Induktive Definition der P-, N-, und NP-Formen

5.1 $*_1$ ist eine P-Form.

5.2 Ist A eine Formel, so ist $(*_1 \rightarrow A)$ eine N-Form.

5.3 Ist $\mathfrak{P}$ eine P-Form und $\mathfrak{N}$ eine N-Form, so sind $(*_1 \rightarrow \mathfrak{P}[*_2])$, $(\neg \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{P}[*_2])$ und $(\neg \mathfrak{P}[*_2] \rightarrow \mathfrak{N})$ NP-Formen.

5.4 Ist A eine Formel und $\mathfrak{C}$ ein P-Form (N-Form, NP-Form), so sind auch $(A \rightarrow \mathfrak{C})$ und $(\neg \mathfrak{C} \rightarrow A)$ P-Formen (N-Formen, NP-Formen).

A heisst ein P-Teil (N-Teil) einer Formel F, wenn es eine P-Form (N-Form) $\mathfrak{C}$ gibt, so dass F die Gestalt $\mathfrak{C}[A]$ hat. Ein P-Teil (N-Teil) A einer Formel F heisst minimal, wenn kein echter Bestandteil von A N- oder P-Teil von F ist.

Wir teilen P-Formen durch $\mathfrak{P}$, N-Formen durch $\mathfrak{N}$, NP-Formen durch $\mathfrak{C}$ mit und schreiben $\mathfrak{C}$ als Mittelungszeichen für N- und P-Formen.

Folgerungen:

5.5 Ist $\mathfrak{C}$ eine NP-Form und sind A und B Formeln, so ist A ein N-Teil und B ein P-Teil der Formel $\mathfrak{C}[A, B]$.

5.6 Ist $\mathfrak{P}$ eine P-Form und A eine Formel, so ist $\mathfrak{P}[A \rightarrow *_1]$ eine P- und $\mathfrak{P}[*_1 \rightarrow A]$ eine N-Form.

5.7 Ist $\mathfrak{N}$ eine N-Form, so ist $\mathfrak{N}[\neg *_1]$ eine P-Form.

5.8 Eine P-Form ist keine N-Form.

6. Induktive Definition von $\mathfrak{P}[\]$ und $\mathfrak{N}[\]$

- 6.1 Ist $\mathfrak{P} \equiv *_1$, so ist $\mathfrak{P}[\]$ leer.
- 6.2 Ist $\mathfrak{N} \equiv (*_1 \rightarrow A)$, so ist $\mathfrak{N}[\] \equiv A$.
- 6.3 Ist $\mathfrak{P} \equiv (A \rightarrow \mathfrak{P}_1)$, so ist $\mathfrak{P}[\] \equiv A \rightarrow \mathfrak{P}_1[\]$, falls $\mathfrak{P}_1[\]$ nicht leer ist und $\mathfrak{P}[\] \equiv \neg A$, falls $\mathfrak{P}_1[\]$ leer ist.
- 6.4 Ist $\mathfrak{N} \equiv (A \rightarrow \mathfrak{N}_1)$, so ist $\mathfrak{N}[\] \equiv A \rightarrow \mathfrak{N}_1[\]$, falls $\mathfrak{N}_1[\]$ nicht leer ist und $\neg A$ sonst.
- 6.5 Ist $\mathfrak{P} \equiv (\neg \mathfrak{P}_1 \rightarrow A)$, so ist $\mathfrak{P}[\] \equiv (\neg \mathfrak{P}_1[\] \rightarrow A)$, falls $\mathfrak{P}_1[\]$ nicht leer ist und A sonst.
- 6.6 Ist $\mathfrak{N} \equiv (\neg \mathfrak{N}_1 \rightarrow A)$, so ist $\mathfrak{N}[\] \equiv (\neg \mathfrak{N}_1[\] \rightarrow A)$, falls $\mathfrak{N}_1[\]$ nicht leer ist und A sonst.

7. Definition der Relation $F \models G$

$F \models G$ gelte genau dann, wenn jeder minimale P- bzw. N-Teil von F auch ein minimaler P- bzw. N-Teil von G ist.

8. Induktive Definition der Ziffern

- 8.1 Die 0-stellige Funktion 0 ist eine Ziffer.
- 8.2 Ist z eine Ziffer, so ist auch z' eine Ziffer. ' ist dabei ein Zeichen für die Nachfolgerfunktion.

9. Numerische Terme

Ein I-Term, der keine freien Variablen enthält, heisst numerisch. Da unsere Sprache nur Zeichen für primitiv-rekursive Funktionen enthält, lässt sich zu jedem numerischen Term in primitiv-rekursiver Weise ein Ziffernwert berechnen.

10. Numerische Formeln

Eine Formel, die weder freie noch gebundene Variablen enthält, heisst numerisch. Der Wahrheitswert einer numerischen Formeln ist damit in primitiv-rekursiver Weise zu berechnen.

11. Zwei Formeln F und G heissen gleichwertig, wenn die eine aus der anderen dadurch hervorgeht, dass numerische Terme durch numerische Terme des gleichen Ziffernwertes ersetzt werden.

12. Axiome des Systems Π^*

12.1 Jede Formel der Gestalt $\mathfrak{P}[P_1]$ oder $\mathfrak{N}[P_2]$ ist ein Axiom, wenn P_1 eine wahre und P_2 eine falsche numerische Primformel ist.

12.2 Jede Formel der Gestalt $\mathfrak{G}[P_1, P_2]$ ist ein Axiom, wenn P_1 und P_2 gleichwertige Primformeln sind.

13. Grundschlussregeln des Systems Π^*

(S1) $\mathfrak{N}[\neg A], \mathfrak{N}[B] \vdash \mathfrak{N}[A \rightarrow B]$

(S2,o)* $\mathfrak{P}[\mathfrak{U}[z]]$ für jede Ziffer z $\vdash \mathfrak{P}[\underline{\forall x \mathfrak{U}[x]}]$, falls $\mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$ eine einfache Formel ist.

(S2,o) $\mathfrak{P}[\mathfrak{U}[u]] \vdash \mathfrak{P}[\underline{\forall x \mathfrak{U}[x]}]$, falls die freie Variable u nicht in der Konklusion auftritt (Variablenbedingung) und die Konklusion keine einfache Formel ist.

(S2,1) $\mathfrak{P}[\mathfrak{U}[U]] \vdash \mathfrak{P}[\underline{\forall X \mathfrak{U}[X]}]$, falls die freie Variable U nicht in der Konklusion auftritt (Variablenbedingung).

(S3,o) $\mathfrak{U}[t] \rightarrow \mathfrak{N}[\forall x \mathfrak{U}[x]] \vdash \mathfrak{N}[\underline{\forall x \mathfrak{U}[x]}]$

(S3,1) $\mathfrak{U}[T] \rightarrow \mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{U}[X]] \vdash \mathfrak{N}[\underline{\forall X \mathfrak{U}[X]}]$ $\mathfrak{U}[T]$ heisst dabei die Eigenformel, T der Eigenausdruck des Schlusses.

(S4) $\mathfrak{G}[\mathfrak{U}[t_1, \dots, t_n]] \vdash \mathfrak{G}[\underline{((t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n])}]$, falls $\lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n]$ definiert ist.

(S5) $\mathfrak{P}[F], \mathfrak{N}[F] \vdash G$, falls $\mathfrak{P}[\] \models G$ und $\mathfrak{N}[\] \models G$ gilt.

Ein Schluss gemäss (S5) heisst ein Schnitt mit der Schnittformel F.

(UI) $\mathfrak{U}[z]$ für jede Ziffer z $\vdash \mathfrak{U}[u]$ (unendliche Induktion), falls $\mathfrak{U}[u]$ eine einfache Formel ist.

Die in den Konklusionen unterstrichenen Minimalteile heissen die Hauptteile des entsprechenden Schlusses.

§2. Herleitungseigenschaften von Π^*

1. Eine Zeichenreihe der Gestalt $\tilde{U}[X_1, \dots, X_n, x_1, \dots, x_m]$ heisst eine Quasiformel (Quasiterm), wenn $\tilde{U}[u_1, \dots, u_n, u_1, \dots, u_m]$ eine Formel (ein Term) ist.

2. Induktive Definition von $g(F)$ für eine Quasiformel F

2.1 Ist F eine einfache Formel, so ist $g(F) = 0$.

Für das folgende sei F als nicht einfach vorausgesetzt.

2.2 Ist $F \equiv F_1 \rightarrow F_2$, so ist $g(F) = g(F_1) + g(F_2) + 1$.

2.3 Ist $F \equiv \forall \xi \tilde{U}[\xi]$ so ist $g(F) = g(\tilde{U}[\xi]) + 1$.

Der Grad $G(F)$ einer Formel F ist die Ordinalzahl $\omega \cdot g(F) + 1(F)$.

Der Grad eines Schnittes mit der Schnittformel F ist $G(F)$.

3. Eine Menge Γ von P-Termen heisst eine P-Menge, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

3.1 Γ enthält alle freien P-Variablen.

3.2 Es gibt eine natürliche Zahl $l(\Gamma)$, so dass $l(T) < l(\Gamma)$ für alle $T \in \Gamma$ gilt.

3.3 Ist $\mathfrak{A}[U]$ ein Element von Γ , so ist auch $\mathfrak{A}[V]$ für jede freie P-Variable V ein Element von Γ .

4. Ist Γ eine P-Menge und T ein P-Term, so ist $\Gamma(T)$ die Menge aller P-Terme $\mathfrak{A}[T]$, für die $\mathfrak{A}[U]$ ein Element von Γ ist. Offenbar ist $\Gamma(T)$ wieder eine P-Menge mit $\Gamma \subset \Gamma(T)$.

5. Induktive Definition von $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F$

5.1 Ist F ein Axiom, so gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F$ für alle P-Mengen Γ , alle $\alpha \in \Sigma$ mit $S\alpha = R\alpha \geq 1$ und alle $\eta < \omega^2$.

5.2 Gilt $\Gamma : \alpha_1 : \eta \vdash F_1$ für die Prämissen eines Grundschlusses $(S1)$, $(S2, 0)$, $(S2, 1)$, $(S3, 0)$, $(S4)$, eines Schnittes eines Grades kleiner als η , oder eines Grundschlusses $(S3, 1)$ für dessen Eigenausdruck

$T \in \Gamma$ gilt, so gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F$ für die Konklusion, falls $K_k \alpha_1 < [\alpha; k]$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt.

5.3 Gilt $\Gamma : \alpha_1 : m \vdash_{F_1}$ für die Prämissen eines Grundschlusses $(S2, o)^*$ oder (UI) und ist $m < \omega$, so gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F$ für die Konklusion für alle α mit $K_k \alpha_1 < [\alpha; k]$ für $k \in \mathbb{N}$ und alle η mit $m \leq \eta < \omega^2$.

Eine Formel heisst herleitbar in Π^* , wenn es eine P-Menge Γ und Ordinalzahlen α und η gibt mit $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F$.

Lemma 1.

Sind F_1 und F_2 gleichwertige Formeln und gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F_1$, so folgt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash F_2$.

Lemma 2.

- a) Gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash \mathfrak{F}[u]$ und tritt u nicht in $\mathfrak{F}$ auf, so gilt auch $\Gamma : \alpha : \eta \vdash \mathfrak{F}[v]$.
- b) Gilt $\Gamma : \alpha : \eta \vdash \mathfrak{F}[u]$ und tritt u nicht in $\mathfrak{F}$ auf, so gilt auch $\Gamma : \alpha : \eta \vdash \mathfrak{F}[z]$ für jede Ziffer z .

Der Beweis erfolgt in beiden Fällen leicht durch Induktion nach α .

Lemma 3.

Ist F eine Formel mit $l(F) = n - 1$, so gilt $\Gamma : \Omega_1.2n : 0 \vdash \mathfrak{G}[F, F]$ für alle P-Mengen Γ .

Beweis durch Induktion nach n .

- 1) Ist F eine Primformel, so ist $\mathfrak{G}[F, F]$ ein Axiom, und die Behauptung ist klar.
- 2) Ist F eine Formel $F_1 \rightarrow F_2$, so gilt nach I.V. $\Gamma : \Omega_1.2n_1 : 0 \vdash \mathfrak{G}[\neg F_1, F_1 \rightarrow F_2]$ und $\Gamma : \Omega_1.2n_2 : 0 \vdash \mathfrak{G}[F_2, F_1 \rightarrow F_2]$ und mit einem $(S1)$ -Schluss folgt $\Gamma : \Omega_1.2n : 0 \vdash \mathfrak{G}[F, F]$.
- 3) Ist F eine Formel $\forall x \mathfrak{F}[x]$, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden.

3.1) $\mathcal{E}[F, F]$ ist eine einfache Formel. Nach I.V. gilt $\Gamma: \Omega_1.2n_1:0 \vdash \mathfrak{F}[z] \rightarrow \mathfrak{N}[F, \mathfrak{F}[z]]$ für jede Ziffer z . Mit einem $(S3,0)$ -Schluss folgt $\Gamma: \Omega_1.(2n_1+1):0 \vdash \mathcal{E}[F, \mathfrak{F}[z]]$ für jede Ziffer z . Mit einem $(S2,0)^*$ -Schluss erhalten wir daraus $\Gamma: \Omega_1.2n:0 \vdash \mathcal{E}[F, F]$.

3.2) Ist $\mathcal{E}[F, F]$ nicht einfach, so verfahren wir analog zum folgenden Fall.

4) F ist eine Formel $\forall X \mathfrak{F}[X]$. Nach I.V. gilt $\Gamma: \Omega_1.2n_1:0 \vdash \mathfrak{F}[U] \rightarrow \mathcal{E}[F, \mathfrak{F}[U]]$ für eine freie Variable U , die nicht in $\mathcal{E}[F, F]$ auftritt. Da für jede P -Menge $U \in \Gamma$ gilt, folgt mit einem $(S3,1)$ -Schluss $\Gamma: \Omega_1.(2n_1+1):0 \vdash \mathcal{E}[F, \mathfrak{F}[U]]$ und mit einem $(S2,1)$ -Schluss erhalten wir $\Gamma: \Omega_1.2n:0 \vdash \mathcal{E}[F, F]$.

Die noch verbleibenden Fälle zeigt man in ähnlicher Weise.

Lemma 4.

- a) Aus $\Gamma: \alpha: \eta \vdash \mathfrak{F}[U]$ folgt $\Gamma: \alpha: \eta \vdash \mathfrak{F}[V]$, falls U nicht in $\mathfrak{F}$ auftritt.
- b) Gilt $\Gamma: \alpha: \omega.n+m \vdash \mathfrak{F}[U]$ und tritt U nicht in $\mathfrak{F}$ auf, so gilt $\Gamma(T): (0, \alpha): \omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{F}[T]$ für jeden P -Term T .

Der Beweis von a) erfolgt kanonisch durch Induktion nach α .

Beweis von b) durch Induktion nach α .

1) Ist $\mathfrak{F}[U]$ ein Axiom, so hat $\mathfrak{F}[U]$ die Gestalt (a) $\mathfrak{P}[P]$, (b) $\mathfrak{N}[P]$ oder (c) $\mathcal{E}[\mathcal{G}_1[U], \mathcal{G}_2[U]]$. Im Falle von (a) und (b) ist auch $\mathfrak{F}[T]$ ein Axiom. Im Falle von (c) ist $\mathfrak{F}[T]$ eine Formel $\mathcal{E}[\mathcal{G}_1[T], \mathcal{G}_2[T]]$ mit gleichwertigen Formeln $\mathcal{G}_1[T]$ und $\mathcal{G}_2[T]$. Nach Lemma 3 und Lemma 1 folgt $\Gamma(T): \Omega_1.2m:0 \vdash \mathfrak{F}[T]$, wenn m die Länge von $\mathcal{G}_1[T]$ ist, und damit auch $\Gamma(T): (0, \alpha): \omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{F}[T]$, denn wegen $\Omega_1 \leq \alpha$ gilt $K_K \Omega_1.2m < [(0, \alpha); k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

2) $\mathfrak{F}[U]$ sei Konklusion eines Grundschlusses $(S1)$, $(S2,0)$, $(S2,1)$, $(S3,0)$ oder $(S4)$ mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_1: \omega.n+m \vdash \mathfrak{F}_1[U]$ ($i=1,2$). Nach I.V. gilt dann $\Gamma(T): (0, \alpha_1): \omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{F}_1[T]$ und mit einem entsprechenden Grundschluss folgt $\Gamma(T): (0, \alpha): \omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{F}[T]$,

wobei im Falle eines $(S2,0)$ oder $(S2,1)$ -Schlusses mit Hilfe von Lemma 2 a) bzw. Lemma 4 a) sicherzustellen ist, dass die Variablenbedingung erfüllt ist.

3) $\mathfrak{U}[U]$ sei die Konklusion eines Schlusses $(S2,0)^*$ oder (UI) . Dann folgt die Behauptung leicht aus der Induktionsvoraussetzung.

4) $\mathfrak{U}[U]$ sei Konklusion eines Schnittes mit der Schnittformel $\mathfrak{G}[U]$. Nach I.V. gilt dann $\Gamma(T):(0,\alpha_1):\omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{G}[T]]$ und $\Gamma(T):(0,\alpha_2):\omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{N}[\mathfrak{G}[T]]$. Nun ist $1(\mathfrak{G}[T]) \leq 1(\mathfrak{G}[U]) \cdot (1(T)+1)$ und damit $G(\mathfrak{G}[T]) < \omega.n+m(1(T)+1)$. Mit einem Schnitt folgt dann die Behauptung.

5) $\mathfrak{U}[U]$ sei Konklusion eines Grundschlusses $(S3,1)$ mit der Prämisse $\Gamma:\alpha_1:\omega.n+m \vdash \mathfrak{G}[\mathfrak{X}[U]] \rightarrow \mathfrak{U}[U]$. Nach I.V. gilt $\Gamma(T):(0,\alpha_1):\omega.n+m(1(T)+1) \vdash \mathfrak{G}[\mathfrak{X}[T]] \rightarrow \mathfrak{U}[T]$. Dann ist $\mathfrak{X}[U] \in \Gamma$ und damit $\mathfrak{X}[T] \in \Gamma(T)$ und mit einem $(S3,1)$ -Schluss folgt die Behauptung.

Lemma 5. (Inversionsregeln)

(IS1) Aus $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{N}[F_1 \rightarrow F_2]$ folgt $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{N}[\neg F_1]$ und $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{N}[F_2]$.

(IS2,0)* Aus $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$ folgt $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[z]]$ für jede Ziffer z .

(IS2,0) Ist die Formel $\mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$ nicht einfach, so folgt aus $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$ auch $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[u]]$.

(IS2,1) Aus $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{P}[\forall X \mathfrak{U}[X]]$ folgt $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{U}[U]$ und $\Gamma(T):(0,\alpha):\eta' \vdash \mathfrak{U}[T]$ für jeden P-Term T , wobei sich η' aus η wie in Lemma 4 berechnet

(IS4) Aus $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{G}[(t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n]]$ folgt $\Gamma:\alpha:\eta \vdash \mathfrak{G}[\mathfrak{U}[t_1, \dots, t_n]]$.

Lemma 6. (Strukturschlussregel)

Ist G eine einfache Formel und gilt $F \models G$ und $\Gamma:\alpha:\eta \vdash F$, so folgt $\Gamma:\alpha:\eta \vdash G$.

Lemma 7.

Gilt $\Gamma_1: \alpha: m' \vdash \mathfrak{P}[F]$, $\Gamma_2: \beta: m'' \vdash \mathfrak{N}[F]$, $\mathfrak{P}[\] \models G$, $\mathfrak{N}[\] \models G$ und ist G eine einfache Formel, so gibt es ein Γ_0 und ein $m_0 < \omega$ mit $\Gamma_0: (n, \alpha * \beta): m_0 \vdash G$, falls $g(F) = n > 0$ ist.

Beweis durch Induktion nach n mit eingeschachtelter Induktion nach β .

Da $n > 0$ vorausgesetzt ist, ist F nicht einfach und kann daher nur die Gestalt $F_1 \rightarrow F_2$, $\forall x \mathfrak{U}[X]$ oder $\forall x \mathfrak{U}[x]$ haben.

1) Ist $\mathfrak{N}[F]$ ein Axiom, so ist auch $\mathfrak{N}[\]$ und damit auch G ein Axiom.

2) Ist $\mathfrak{N}[F]$ durch einen Grundschluss mit dem Prämissen $\Gamma_1': \beta_1: m' \vdash \mathfrak{N}_1[F]$ erschlossen, dessen Hauptteil nicht F ist, so gilt nach der Nebeninduktionsvoraussetzung $\Gamma_1'': (n, \alpha * \beta_1): m_1 \vdash \neg \mathfrak{N}_1[\] \rightarrow \mathfrak{P}[\]$. Da $\mathfrak{N}[F]$ nicht einfach ist, kann kein Grundschluss gemäss (S2,0)* oder (UI) vorliegen.

Also ist $i = 1, 2$. Mit einem entsprechenden Grundschluss und Lemma 6 folgt dann $\Gamma_0: (n, \alpha * \beta): m_0 \vdash G$ mit $\Gamma_0 = \Gamma_1'' \cup \Gamma_2''$ und $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$.

3) Ist $F \equiv F_1 \rightarrow F_2$ und $\mathfrak{N}[F]$ Konklusion eines (S1)-Schlusses mit den Prämissen $\Gamma_2: \beta_1: m'' \vdash \mathfrak{N}[F_1]$ und $\Gamma_2: \beta_2: m'' \vdash \mathfrak{N}[F_2]$, so folgt nach der Nebeninduktionsvoraussetzung $\Gamma': (n_2, \alpha * \beta_2): m_1 \vdash F_1 \rightarrow G$, wenn $g(F_2) = n_2$ ist. Da $g(F_1) = n_1 < n$ ist, folgt nach Hauptinduktionsvoraussetzung $\Gamma_0: (n_1, \beta_1 * (n_2, \alpha * \beta_2)): m_0 \vdash G$. Sei $N = \max\{S\alpha, S\beta\}$. Dann ist auch $S\beta_1 \leq N$. Für $N \leq k$ ist dann $K_k(n_1, \beta_1 * (n_2, \alpha * \beta_2)) = \{(n_1, \beta_1 * (n_2, \alpha * \beta_2))\}$ und $[(n, \alpha * \beta); k] = (n, \alpha * \beta)$. Wegen $n_1 < n$, $\beta_1 < (n, \alpha * \beta)$, $n_2 < n$ und $\alpha * \beta_2 < (n, \alpha * \beta)$ folgt $K_k(n_1, \beta_1 * (n_2, \alpha * \beta_2)) < [(n, \alpha * \beta); k]$.

Für $k < N$ ist $K_k(n_1, \beta_1 * (n_2, \alpha * \beta_2)) = \{1\} \cup K_k\beta_1 \cup K_k\beta_2 \cup K_k\alpha < [(n, \alpha * \beta); k]$, was wegen $K_k\beta_1 < [\beta; k]$ und $K_k\beta_2 < [\beta; k]$ mit Hilfe von I.16 leicht nachzurechnen ist. Also folgt $\Gamma_0: (n, \alpha * \beta): m_0 \vdash G$.

4) F ist eine Formel $\forall x \mathfrak{U}[X]$ und $\mathfrak{N}[\forall x \mathfrak{U}[X]]$ ist die Konklusion eines (S3,1)-Schlusses mit der Prämisse $\Gamma_2: \beta_1: m'' \vdash \mathfrak{U}[T] \rightarrow \mathfrak{N}[F]$. Nach der Nebeninduktionsvoraussetzung folgt $\Gamma': (n, \alpha * \beta_1): m_1 \vdash \mathfrak{U}[T] \rightarrow G$. Mit (IS2,1) erhalten wir $\Gamma(T): (0, \alpha): m'(1(T)+1) \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[T]]$ und nach der

Hauptinduktionsvoraussetzung $\Gamma_0: (n_1, (0, \alpha) \# (n, \alpha \# \beta_1)): m_0 \vdash G$ mit $n_1 = g(\mathfrak{F}[T]) < n$ und man rechnet leicht nach, dass $K_K(n_1, (0, \alpha) \# (n, \alpha \# \beta)) < [(n, \alpha \# \beta); k]$ für $k \in \mathbb{N}$ ist. Damit folgt $\Gamma_0: (n, \alpha \# \beta): m_0 \vdash G$.

5) Ist $F \equiv \forall x \mathfrak{F}[x]$ Hauptteil eines (S3,0)-Schlusses, so führt man den Beweis ganz ähnlich wie in 4).

Lemma 8.

Ist F eine einfache Formel und gilt $\Gamma: \alpha: \omega.n+m \vdash F$, so gibt es eine P -Menge Γ_0 und ein $m_0 < \omega$ mit $\Gamma_0: (n+1, \alpha): m_0 \vdash F$.

Beweis durch Induktion nach α .

1) Ist F ein Axiom, so ist die Behauptung klar.

2) Ist F durch einen Grundschluss gemäss (S1), (S2,1), (S3) oder (S4) mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_i: \omega.n+m \vdash F_i$ ($i=1,2$) erschlossen, so gilt nach I.V. $\Gamma_1: (n+1, \alpha_1): m_1 \vdash F_1$ und mit dem gleichen Grundschluss erhalten wir $\Gamma_0: (n+1, \alpha): m_0 \vdash F$ mit $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ und $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$.

3) Ist F durch einen Grundschluss (S2,0)* oder (UI) mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_1: m_1 \vdash F_1$ erschlossen, so ist $m_1 < \omega$, und wir erhalten die Behauptung mit $\Gamma_0 = \Gamma$ und $m_0 = m_1$.

4) F sei durch einen Schnitt mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_1: \omega.n+m \vdash \mathfrak{P}[F_1]$ und $\Gamma: \alpha_2: \omega.n+m \vdash \mathfrak{P}[F_2]$ hergeleitet. Nach I.V. folgt dann $\Gamma_1: (n+1, \alpha_1): m_1 \vdash \mathfrak{P}[F_1]$ und $\Gamma_2: (n+1, \alpha_2): m_2 \vdash \mathfrak{P}[F_2]$. Ist F_1 einfach, so ist $G(F_1) = m_3 < \omega$ und mit einem Schnitt folgt $\Gamma_0: (n+1, \alpha): m_0 \vdash F$ mit $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ und $m_0 = \max\{m_1, m_2, m_3\}$. Ist F_1 nicht einfach, so ist $n_1 = g(F_1) > 0$. Nach Lemma 7 gibt es ein Γ_0 und ein $m_0 < \omega$ mit $\Gamma_0: (n_1, (n+1, \alpha_1) \# (n+1, \alpha_2)): m_0 \vdash F$. Da $G(F_1) < \omega.n+m$ ist, folgt $n_1 < n+1$ und damit rechnet man leicht nach, dass für $k \in \mathbb{N}$ $K_K(n_1, (n+1, \alpha_1) \# (n+1, \alpha_2)) < [(n+1, \alpha); k]$ ist. Also folgt auch $\Gamma_0: (n+1, \alpha): m_0 \vdash F$.

§3. Normalherleitungen

1. Wir fügen den Grundschlussregeln eine weitere Schlussregel
(S) $\mathfrak{U}[U] \vdash \mathfrak{U}[T]$ falls U nicht in $\mathfrak{U}$ auftritt

hinzu. Schlüsse gemäss (S) nennen wir Substitutionen. U heisst die Eigenvariable der Substitution.

2. Unter einer Herleitung von Π^* verstehen wir eine Menge $\mathfrak{G}$ von einfachen Formeln ohne freie I-Variablen mit einer Unterformelrelation μ , für die folgendes gilt:

2.1 Jede Formel $F \in \mathfrak{G}$, die kein Axiom ist, ist die Konklusion eines Schlusses gemäss (S1), (S2,0)*, (S2,1), (S3), (S4), (S5) oder (S), wobei für jede Prämisse des Schlusses $G \in \mathfrak{G}$ und $G \mu F$ gilt.

2.2 Es gibt keine unendliche Folge $F_1, F_2, \dots$ aus $\mathfrak{G}$, für die $F_i \mu F_{i+1}$ gilt und genau eine Formel F, für die es kein G mit $F \mu G$ gibt.

Die in 2.2 geforderte Formel F heisst die Endformel von $\mathfrak{G}$. Wir kürzen mit $\mathfrak{G} \vdash F$ ab, dass F Endformel von $\mathfrak{G}$ ist.

3. Entsprechende Minimalteile eines Schlusses

3.1 Ist $\mathfrak{C}_1[F_1] \vdash \mathfrak{C}[F]$ ein Grundschluss gemäss (S1) - (S4), so entspricht jedem Minimalteil von $\mathfrak{C}[]$, der an der gleichen Stelle in $\mathfrak{C}_1[]$ stehende Minimalteil.

3.2 Ist $\mathfrak{C}_1[F_1] \vdash \mathfrak{C}[F]$ ein Grundschluss gemäss (S1), (S2) oder (S4), so entspricht dem Minimalteil F der Konklusion jeder Minimalteil von F_1 .

3.3 Ist $\mathfrak{U}[\tau] \rightarrow \mathfrak{A}[\forall \xi \mathfrak{U}[\xi]] \vdash \mathfrak{A}[\forall \xi \mathfrak{U}[\xi]]$ ein Schluss gemäss (S3), so entspricht dem Minimalteil $\forall \xi \mathfrak{U}[\xi]$ der Konklusion der Minimalteil $\forall \xi \mathfrak{U}[\xi]$ der Prämisse und jeder Minimalteil von $\mathfrak{U}[\tau]$.

3.4 Ist $\mathfrak{P}[F], \mathfrak{A}[F] \vdash G$ ein Schnitt, so entsprechen jedem Minimalteil von G die gleichlautenden Minimalteile von $\mathfrak{P}[]$ und $\mathfrak{A}[]$.

3.5 Ist $\mathfrak{U}[U] \vdash \mathfrak{U}[T]$ eine Substitution, so entspricht jedem Minimalteil $\mathfrak{G}[T]$ der Konklusion der an der selben Stelle stehende Minimalteil $\mathfrak{G}[U]$ der Prämisse.

4. Induktive Definition der Formelbundes f einer Formel F in einer Herleitung $\mathfrak{S}$

4.1 Jeder Minimalteil von F gehört zu f .

4.2 Gehört ein Minimalteil M zu f , so gehört auch jeder M entsprechende Minimalteil zu f .

5. Explizite und implizite Minimalteile und Schlüsse in einer Herleitung $\mathfrak{S}$.

5.1 Ein Minimalteil M heisst explizit in einer Herleitung $\mathfrak{S}$, wenn er zum Formelbund der Endformel gehört.

5.2 Ein Minimalteil M heisst implizit in einer Herleitung $\mathfrak{S}$, wenn er zum Formelbund einer Schnittformel von $\mathfrak{S}$ gehört.

5.3 Ein Schluss heisst explizit (implizit) in einer Herleitung $\mathfrak{S}$, wenn sein Hauptteil explizit (implizit) in $\mathfrak{S}$ ist.

6. Induktive Definition des Endstückes $\mathfrak{E}$ einer Herleitung $\mathfrak{S}$

6.1 Die Endformel von $\mathfrak{S}$ gehört zu $\mathfrak{E}$.

6.2 Gehört die Konklusion eines nicht impliziten Schlusses zu $\mathfrak{E}$, so gehören auch die Prämissen zu $\mathfrak{E}$.

6.3 Die Prämissen eines impliziten Schlusses gehören nicht zu $\mathfrak{E}$.

7. Wir sagen, dass ein Schluss zum Endstück $\mathfrak{E}$ gehört, wenn seine Konklusion zu $\mathfrak{E}$ gehört.

Ein Schluss heisst ein Begrenzungsschluss von $\mathfrak{E}$, wenn er zu $\mathfrak{E}$ gehört, seine Prämissen aber nicht in $\mathfrak{E}$ liegen.

Folgerung: Jeder Begrenzungsschluss ist ein impliziter Schluss im Endstück.

8. Ein Schluss gemäss (S2,₁) oder (S) beeinträchtigt eine Quasiformel F in einer Herleitung $\mathfrak{H}$, wenn die Eigenvariable des Schlusses im Bereich eines P-Quantors von F steht.

9. Eine Herleitung $\mathfrak{H}$ heisst eine Herleitung mit Rangzuordnung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

9.1 $\mathfrak{H}$ enthält nur endlich viele Substitutionen

9.2 Jeder Quasiformel F und jeder Substitution J von $\mathfrak{H}$ lassen sich natürliche Zahlen $r_{\mathfrak{H}}(F)$ und $r_{\mathfrak{H}}(J)$ als Ränge so zuordnen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

9.2.1 $r(F) = \max\{r(M_1) : M_1 \text{ ist Minimalteil von } F\}$.

9.2.2 Ist M ein expliziter Minimalteil oder eine Quasiprimformel, so ist $r(M) = 0$.

9.2.3 Ist $M \equiv M_1 \rightarrow M_2$ ein impliziter Minimalteil, so ist $r(M) = \max\{r(M_1), r(M_2)\} + 1$.

9.2.4 Ist $M \equiv \forall x \mathfrak{F}[x]$ ein impliziter Minimalteil, so ist $r(M) = r(\mathfrak{F}[x]) + 1$.

9.2.5 Ist $M \equiv \forall X \mathfrak{F}[X]$ ein impliziter Minimalteil, so ist $r(M) = \max\{r(\mathfrak{F}[X]), r(J)\} + 1$, wobei J alle Substitutionen in $\mathfrak{H}$ durchläuft, die M beeinträchtigen.

9.2.6 Ist $M \equiv (t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n]$ ein impliziter Minimalteil, so ist $r(M) = r(\mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n])$.

9.2.7 Für die Prämisse G einer Substitution J gilt $r(G) < r(J)$.

9.4 Es gibt eine natürliche Zahl $R(\mathfrak{H})$, den Rang von $\mathfrak{H}$, so dass $r(F) < R(\mathfrak{H})$ und $r(J) \leq R(\mathfrak{H})$ für alle $F \in \mathfrak{H}$ und alle Substitutionen J in $\mathfrak{H}$ gilt.

Lemma 1.

Ist $\mathfrak{Q}$ eine Herleitung ohne Substitutionen und gibt es eine P-Menge Γ , so dass für alle Eigenausdrücke T von $(S\mathfrak{Z}, 1)$ -Schlüssen in $\mathfrak{Q}$ $T \in \Gamma$ gilt und eine natürliche Zahl m , so dass für alle Schnittformeln F von Schnitten in $\mathfrak{Q}$ $G(F) < m$ gilt, so ist $\mathfrak{Q}$ eine Herleitung mit Rangzuordnung vom Rang $m.l(\Gamma)$.

Beweis.

Da für jede Schnittformel $G(F) < m$ gilt, ist jede Schnittformel einfach. Wir ordnen jeder Quasiformel von $\mathfrak{Q}$ induktiv gemäss 9.2.1 - 9.2.6 einen Rang zu. Da $\mathfrak{Q}$ keine Substitutionen enthält, gilt dann für jede Quasiformel $F \in \mathfrak{Q}$ $r(F) \leq l(F)$. Zu zeigen bleibt, dass für jeden impliziten Minimalteil M von $\mathfrak{Q}$ $r(M) < m.l(\Gamma)$ gilt. Wir zeigen dies durch Induktion nach der Anzahl der Formeln des Formelbundes der entsprechenden Schnittformel, die unterhalb von M stehen.

1) Ist M Minimalteil der Schnittformel, so ist $r(M) \leq l(M) < m.l(\Gamma)$.
 2) Ist M ein impliziter Minimalteil in einer Prämisse eines $(S1), (S2), (S3, 0)$ oder $(S4)$ -Schlusses, so gilt $r(M) \leq r(M_1)$, wenn M M_1 entspricht. Nach I.V. gilt aber $r(M_1) < m.l(\Gamma)$.

3) Ist M Minimalteil in der Prämisse $\mathfrak{F}[T] \rightarrow \mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{F}[X]]$ eines $(S\mathfrak{Z}, 1)$ -Schlusses, der nicht dem Hauptteil entspricht, so gilt wieder $r(M) \leq r(M_1)$, wenn M M_1 entspricht, und die Behauptung folgt sofort aus der I.V.. Entspricht M dem Minimalteil $\forall X \mathfrak{F}[X]$, so ist M entweder $\forall X \mathfrak{F}[X]$ in $\mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{F}[X]]$ und nach I.V. gilt $r(M) < m.l(\Gamma)$ oder M ist ein Minimalteil von $\mathfrak{F}[T]$ und dann gilt $r(M) \leq l(\mathfrak{F}[T]) \leq l(\mathfrak{F}[U]).(l(T)+1) < m.l(\Gamma)$.

10. Normale Herleitungen

Eine Herleitung $\mathfrak{Q}$ mit Rangzuordnung eines Ranges N heisst eine Normalherleitung (NH), wenn sich jeder Formel $F \in \mathfrak{Q}$ eine Ordinalzahl $OF \in \Sigma'(N)$ der Stufe N so zuordnen lässt, dass gilt:

10.1 Ist F ein Axiom, so ist $OF = (0, \Omega_N)$.

10.2 Ist F Konklusion eines $(S1)$ -Schlusses mit den Prämissen F_1 und F_2 , so ist $OF = (0, OF_1 \# OF_2)$.

10.3 Ist F Konklusion eines $(S2,1)$, $(S3,0)$ oder $(S4)$ -Schlusses mit der Prämisse F_1 , so ist $OF = (0, OF_1)$

10.4 Ist F Konklusion eines $(S3,1)$ -Schlusses mit der Prämisse $F_1 \equiv \exists[T] \rightarrow F$, so ist $OF = (n+1, OF_1)$, wenn n die Länge von $\exists[T]$ ist.

10.5 Ist F Konklusion eines $(S2,0)$ -Schlusses mit den Prämissen F_1 , so gilt $K_k OF_1 < [OF; k]$ für $0 \leq k \leq N$.

10.6 Ist F Konklusion eines Schnittes mit den Prämissen F_1 und F_2 , so ist $OF = (n, OF_1 \# OF_2)$, wenn n die Länge der Schnittformel ist.

10.7 Ist F Konklusion einer Substitution vom Rang $i+1$ mit der Prämisse F_1 , so ist $OF = (0, \Omega_N \# [OF_1; 1])$.

Die Ordinalzahl $Od\mathfrak{S}$ einer Herleitung $\mathfrak{S}$ ist die Ordinalzahl OF der Endformel F . Die Ordnung $Od\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}$ ist die Ordinalzahl $[Od\mathfrak{S}; 0]$.

Lemma 2.

Voraussetzungen:

(1) $\mathfrak{S}$ ist eine NH mit $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{S}$ und $F_n \mu \dots \mu F_1$.

(2) Für jede Substitution J zwischen F_1 und F_n ist $r(J) \geq 1$.

Behauptung:

Es gilt $K_k OF_n < [OF_1; k]$ für $0 \leq k < i$. Insbesondere gilt immer $[OF_n; 0] < [OF_1; 0]$.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe von I.16. und 17. leicht durch Induktion nach n .

Lemma 3.

Voraussetzungen:

- (1) $\mathfrak{S}$ ist eine NH vom Range N mit $F_1, \dots, F_m \in \mathfrak{S}$ und $F_1 \mu \dots \mu F_m$, so dass zwischen F_1 und F_m kein (S2,0)*Schluss liegt.
- (2) Für alle Substitutionen J zwischen F_1 und F_m gilt $r(J) \geq 1$.
- (3) β ist ein Ordinalterm aus $\Sigma'(N)$ der Stufe N und es gibt ein $j < i$, so dass $K_k \beta < [OF_1; k]$ für $j \leq k \leq N$ gilt.
- (4) $\beta_1, \dots, \beta_m$ ist die Folge von Ordinaltermen, die analog zur Folge $OF_1, \dots, OF_m$ gebildet wurde, indem man mit β an Stelle von OF_1 begann.

Behauptungen:

- a) Es ist $K_k \beta_m - K_k \beta_1 \subset K_k OF_m$ für $0 \leq k < i-1$
- b) Es gilt $S\beta_m = N$ und $K_k \beta_m < [OF_m; k]$ für $j \leq k \leq N$.

Beweis durch Induktion nach m.

- 1) Ist $m=1$, so gilt a) trivialerweise und b) nach Voraussetzung (3).
- 2) F_m ist Konklusion eines Schlusses, der keine Substitution ist.
Dann ist $OF_m = (n, OF_{m-1} \# \alpha)$ und folglich $\beta_m = (n, \beta_{m-1} \# \alpha)$. Nach I.V. gilt dann $S\beta_{m-1} = N$ und damit auch $S\beta_m = N$.
a) Für $k < i-1 < N$ gilt dann $K_k \beta_m = \{1\} \cup K_k \beta_{m-1} \cup K_k \alpha$ und $K_k OF_m = \{1\} \cup K_k OF_{m-1} \cup K_k \alpha$. Aus der I.V. folgt dann sofort $K_k \beta_m - K_k \beta_1 \subset K_k OF_m$.
b) Für $k=N$ ist $K_k \beta_m = \{\beta_m\}$ und $[OF_m; k] = OF_m$. Nach I.V. gilt $\beta_{m-1} < OF_{m-1}$ und daraus folgt sofort $\beta_m < OF_m$.

Für $j \leq k < N$ ist $K_k \beta_m = \{1\} \cup K_k \beta_{m-1} \cup K_k \alpha$ (ist $n=0$, so fällt $\{1\}$ weg)
 $1 < [OF_m; k]$ ist sofort klar. Nach I.V. gilt $K_k \beta_{m-1} < [OF_{m-1}; k]$ und $[OF_{m-1}; k] < [OF_m; k]$ folgt nach Lemma 2. Es ist $K_k \alpha \subset K_k [OF_m; k+1]$ und daraus folgt $K_k \alpha < [OF_m; k]$.

- 3) F_m ist Konklusion einer Substitution vom Rang $l+1$. Dann ist $OF_m = (0, \Omega_N \# [OF_{m-1}; l])$ mit $j \leq l$ und folglich $\beta_m = (0, \Omega_N \# [\beta_{m-1}; l])$.
a) Für $k < i-1 \leq l$ ist $K_k \beta_m = K_k \beta_{m-1}$ und $K_k OF_m = K_k OF_{m-1}$. Die Behauptung folgt somit sofort aus der I.V..

b) Für $k=N$ ist $K_k \beta_m = \{\beta_m\}$ und $[OF_m; k] = OF_m$. Nach I.V. ist $K_k \beta_{m-1} < [OF_{m-1}; k]$ für $j \leq k \leq N$. Wegen $j \leq 1$ folgt daraus nach I.14.4 $[\beta_{m-1}; 1] < [OF_{m-1}; 1]$ und daraus sofort $\beta_m < OF_m$.

Ist $1 < k < N$, so ist $K_k \beta_m = \{[\beta_{m-1}; 1]\} < [OF_m; k]$.

Ist $k=1$, so ist $K_k \beta_m = \{[\beta_{m-1}; 1]\} < [OF_{m-1}; 1] < [OF_m; 1]$ nach Lemma 2.

Ist $j \leq k < 1$, so ist $K_k \beta_m = K_k \beta_{m-1} < [OF_{m-1}; k] < [OF_m; k]$.

Lemma 4.

Ist F eine einfache Formel ohne freie I-Variablen und gilt $\Gamma: \alpha; m \vdash F$ mit $m < \omega$, so gibt es eine NH $\Phi \vdash F$ vom Rang $N = m.l(\Gamma)$, die keine Substitutionen enthält und für deren Eigenausdrücke $Te\Gamma$ gilt mit $K_k O\Phi \leq [(\omega, \alpha^*); k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

(Dabei sei $\alpha^* = \alpha$, falls $N \leq Ra = N_1$ ist, und für $N_1 < N$ der Wert der in I.21. definierten Abbildung $*: \Sigma'(N_1) \rightarrow \Sigma'(N)$.)

Beweis durch Induktion nach α .

1) Ist F ein Axiom, so ist $\Phi = \{F\}$ eine NH von F . Wir definieren $O\Phi = (0, \Omega_N)$ und es ist $S\alpha^* = N$. Also folgt $(0, \Omega_N) < (\omega, \alpha^*)$ und damit auch $K_k O\Phi \leq [(\omega, \alpha^*); k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

2) F ist durch einen Schluss J mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_1; m \vdash F_1$ erschlossen. Alle Fälle lassen sich ganz ähnlich behandeln. Wir zeigen nur die beiden interessanteren Fälle.

2.1) J ist ein Schluss gemäss $(S2, 0)^*$. Nach I.V. haben wir NHn $\Phi_1 \vdash F_1$. Wir bilden $\Phi = \bigcup \Phi_1 \cup \{F\}$ mit $F_1 \mu F$. Φ ist dann eine Herleitung mit Rangzuordnung vom Rang N und wir definieren $O\Phi = OF = (\omega, \alpha^*)$. Nach I.V. gilt $K_k O\Phi_1 \leq [(\omega, \alpha_1^*); k]$. Da $K_k \alpha_1 < [\alpha; k]$ gilt, folgt nach I.21.5 auch $[(\omega, \alpha_1^*); k] < [(\omega, \alpha^*); k]$ und damit $K_k O\Phi_1 < [(\omega, \alpha^*); k]$. Somit ist Φ eine NH.

2.2) J ist ein Schnitt mit den Prämissen $\Gamma: \alpha_1; m \vdash F_1$ und $\Gamma: \alpha_2; m \vdash F_2$. Nach I.V. haben wir NHn $\Phi_1 \vdash F_1$ und $\Phi_2 \vdash F_2$. Wir bilden $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \{F\}$ mit $F_1 \mu F$ ($i=1,2$). Φ erfüllt dann die Voraussetzungen des Lemma 1 und

ist somit eine Herleitung mit Rangzuordnung vom Rang N . Wir definieren $O\mathfrak{Q} = OF = (n, O\mathfrak{Q}_1 \# O\mathfrak{Q}_2)$, wenn n die Länge der Schnittformel ist, und rechnen leicht nach, dass $K_k O\mathfrak{Q} \leq [(\omega, \alpha^*), k]$ gilt.

§4. Eigenschaften von Normalherleitungen

1. Eine Abbildung $\varphi: \mathfrak{Q} \rightarrow \mathfrak{Q}' \cup \{\emptyset\}$ heisst ein Homomorphismus der NHn $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.1 Zu jeder Formel $F' \in \mathfrak{Q}'$ gibt es höchstens eine Formel $F \in \mathfrak{Q}$ mit $\varphi F = F'$.

1.2 Ist F ein Axiom in $\mathfrak{Q}$, und ist φF nicht leer, so ist φF ein Axiom in $\mathfrak{Q}'$.

1.3 Ist $F_1 \vdash F$ ein Schluss in $\mathfrak{Q}$ gemäss einer Schlussregel R , so ist $\varphi F_1 \vdash \varphi F$ ein Schluss gemäss R in $\mathfrak{Q}'$, oder es ist $\varphi F_1 = \varphi F$ für ein i und $\varphi F_j = \emptyset$ für alle $j \neq i$.

$\mathfrak{Q}'$ heisst ein homomorphes Bild von $\mathfrak{Q}$, wenn es einen Homomorphismus von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{Q}'$ gibt.

Folgerungen:

1.4 Die Hintereinanderausführung von Homomorphismen ergibt wieder einen Homomorphismus.

1.5 Ist $\mathfrak{Q}'$ ein homomorphes Bild von $\mathfrak{Q}$, so hat jeder Schluss in $\mathfrak{Q}'$ genau ein Urbild in $\mathfrak{Q}$.

Lemma 1.

Sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ NHn vom Rang N und ist $\mathfrak{Q}'$ ein homomorphes Bild von $\mathfrak{Q}$, derart dass jede Substitution in $\mathfrak{Q}'$ von gleichem Rang wie ihr Urbild in $\mathfrak{Q}$ ist, so gilt $K_k O\mathfrak{Q}' \leq [O\mathfrak{Q}; k]$ für $0 \leq k \leq N$.

Der Beweis erfolgt kanonisch durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{Q}$.

Lemma 2.

- a) Ist $\mathfrak{S}$ eine NH mit $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{U}[u]$, und tritt u nicht in $\mathfrak{U}$ auf, so gibt es für jede Ziffer z ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}_z$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}_z \vdash \mathfrak{U}[z]$.
- b) Ist $\mathfrak{S}$ eine NH mit $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{U}[U]$, und tritt U nicht in $\mathfrak{U}$ auf, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}' \vdash \mathfrak{U}[V]$.

Für das Folgende sollen $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}', \dots$ immer NHn mitteilen.

Lemma 3.

- a) Gilt $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{N}[F_1 \rightarrow F_2]$, so gibt es homomorphe Bilder $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}_1 \vdash \mathfrak{N}[\neg F_1]$ und $\mathfrak{S}_2 \vdash \mathfrak{N}[F_2]$.
- b) Gilt $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}_z$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}_z \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[z]]$ für jede Ziffer z .
- c) Gilt $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{P}[\forall X \mathfrak{U}[X]]$, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}' \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[U]]$ für jede freie P-Variable U .
- d) Gilt $\mathfrak{S} \vdash \mathfrak{C}[(t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n]]$, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}' \vdash \mathfrak{C}[\mathfrak{U}[t_1, \dots, t_n]]$.

Lemma 4.

Sind F_1 und F_2 gleichwertige Formeln und gilt $\mathfrak{S} \vdash F_1$, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}' \vdash F_2$.

Lemma 5.

Gilt $\mathfrak{S} \vdash F$ und $F \models G$, so gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S}' \vdash G$.

§5. Reduzible Normalherleitungen

1. Eine NH $\mathcal{G}$ vom Rang N mit $\mathcal{G} \vdash F$ heisst **reduzibel**, wenn $\mathcal{G}$ schnittfrei ist, oder es NHn $\mathcal{G}_1$ vom Rang N mit $\mathcal{G}_1 \vdash F_1$ gibt, so dass gilt:

1.1 $\text{Od}\mathcal{G}_1 < \text{Od}\mathcal{G}$

1.2 Aus der Existenz schnittfreier NHn $\mathcal{G}_1' \vdash F_1$ mit $K_k \text{Od}_1' \leq [\text{Od}_1; k]$ folgt die Existenz einer schnittfreien NH $\mathcal{G}' \vdash F$ mit $K_k \text{Od}' \leq [\text{Od}; k]$.

Lemma 1.

Enthält das Endstück $\mathcal{G}$ einer NH $\mathcal{G}$ einen expliziten Schluss, so ist $\mathcal{G}$ **reduzibel**.

Beweis.

Sei J der unterste explizite Schluss in $\mathcal{G}$. Wir beweisen das Lemma durch "Endverlegung" des Schlusses. Da alle Fälle wieder sehr ähnlich verlaufen, beschränken wir uns darauf, den Beweis nur für zwei Fälle vorzuführen.

1) J ist ein Schluss gemäss (S1). $\mathcal{G}$ hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_2 \\
 \swarrow \downarrow \searrow & & \swarrow \downarrow \searrow \\
 \alpha & & \beta \\
 \mathcal{N}[\neg F_1] & & \mathcal{N}[F_2] \\
 \hline
 & \gamma & \\
 & \mathcal{N}[F_1 \rightarrow F_2] & \\
 \swarrow \downarrow \searrow & & \\
 \sigma & & \\
 \mathcal{N}[F_1' \rightarrow F_2'] & &
 \end{array}
 \quad J$$

Zwischen J und der Endformel können dann höchstens noch Schnitte oder Substitutionen liegen, da anderenfalls J nicht mehr im Endstück liegen würde. Nach §4. Lemma 5 gibt es homomorphe Bilder $\mathcal{G}_1'$ und $\mathcal{G}_2'$ von $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ mit $\mathcal{G}_1' \vdash F_1 \rightarrow \mathcal{N}[F_1 \rightarrow F_2]$ und $\mathcal{G}_2' \vdash F_2 \rightarrow \mathcal{N}[F_1 \rightarrow F_2]$. Wir bilden die Herleitungen

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \S_1' \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \alpha' \\ \S' \equiv \neg F_1 \rightarrow \mathfrak{N}[F_1 \rightarrow F_2] \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \sigma_1 \\ \neg F_1' \rightarrow \mathfrak{N}[F_1' \rightarrow F_2'] \end{array} & \text{und} & \begin{array}{c} \S_2' \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \beta' \\ \S'' \equiv F_2 \rightarrow \mathfrak{N}[F_1 \rightarrow F_2] \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \sigma_2 \\ F_2' \rightarrow \mathfrak{N}[F_1' \rightarrow F_2'] \end{array} \end{array}$$

und ordnen jeder Substitution in $\S'$ und $\S''$ den gleichen Rang wie in $\S$ bzw. den Rang ihres Urbildes in $\S_1'$ zu und erreichen damit, dass $\S'$ und $\S''$ den Rang von $\S$ erhalten. Nach §4. Lemma 1 gilt $K_k \alpha' \leq [\alpha; k]$ und $K_k \beta' \leq [\beta; k]$. Daraus folgt $K_k \alpha' < [\gamma; k]$ und $K_k \beta' < [\gamma; k]$ für $0 \leq k \leq N$. Da die Voraussetzungen des §3. Lemma 3 erfüllt sind, folgt daraus $\text{Od} \S' < \text{Od} \S$ und $\text{Od} \S'' < \text{Od} \S$. Haben wir schnittfreie Herleitungen der Endformeln von $\S'$ und $\S''$, so erhalten mit einem (S1)-Schluss eine NH der Formel $(F_1' \rightarrow F_2') \rightarrow \mathfrak{N}[F_1' \rightarrow F_2']$ und daraus nach §4. Lemma 5 eine schnittfreie NH der Endformel von $\S$. Dass die Ordinalzahlbedingung 1.2 erfüllt ist, zeigt man relativ leicht durch Induktion nach der Anzahl der Formeln zwischen J und der Endformel.

2) J sei ein Schluss gemäss (S2,0)* $\S$ hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \S_z & \cdot & \cdot & \cdot \\ \swarrow \swarrow & \swarrow \swarrow & \swarrow \swarrow & \swarrow \downarrow \searrow & \swarrow \swarrow & \swarrow \swarrow & \swarrow \swarrow \\ & & & \alpha_z & & & \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \mathfrak{P}[\mathfrak{U}[z]] & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \beta & & & \end{array} & J \\ \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]] \\ \swarrow \swarrow \\ \gamma \\ \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}'[x]] \end{array}$$

Unterhalb von J liegen dann wieder höchstens noch Schnitte und Substitutionen. Ähnlich wie im vorigen Fall bilden wir die Herleitungen

$$\begin{array}{c} \S_z' \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ \alpha_z' \\ \mathfrak{U}[z] \rightarrow \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{U}[x]] \\ \swarrow \swarrow \\ \gamma_z \\ \mathfrak{U}[z] \rightarrow F \end{array}$$

und prüfen leicht nach, dass die Bedingungen 1.1 und 1.2 erfüllt sind.

Lemma 2.

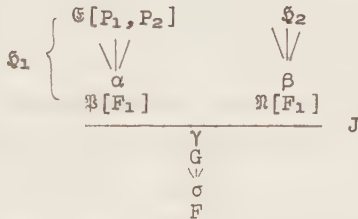
Enthält das Endstück $\mathbb{G}$ einer NH $\mathbb{Q}$ ein Axiom der Gestalt $\mathbb{G}[P_1, P_2]$, so ist $\mathbb{Q}$ reduzibel.

Beweis.

Enthält $\mathbb{G}$ keinen Schnitt, so ist $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$, und damit ist $\mathbb{Q}$ reduzibel.

Sei also J der oberste Schnitt in $\mathbb{G}$ unterhalb von $\mathbb{G}[P_1, P_2]$.

Hat $\mathbb{Q}$ die Gestalt



so muss jeder Schluss mit Hauptteil zwischen $\mathbb{G}[P_1, P_2]$ und F explizit sein. Existiert ein solcher Schluss, so ist $\mathbb{Q}$ nach Lemma 1 reduzibel. Wir dürfen daher annehmen, dass dort höchstens noch Schnitte und Substitutionen liegen. Dann liegen aber zwischen $\mathbb{G}[P_1, P_2]$ und J nur noch Substitutionen.

1) P_2 gehört nicht zum Formelbund von F_1 . Streichen wir alle Teile des Formelbundes von F_1 in $\mathbb{Q}_1$, so erhalten wir ein homomorphes Bild $\mathbb{Q}_1'$ von $\mathbb{Q}_1$ mit $\mathbb{Q}_1' \vdash \mathbb{P}[\]$. Da $\mathbb{P}[\] \models \mathbb{G}$ gilt, gibt es ein homomorphes Bild $\mathbb{Q}_1''$ von $\mathbb{Q}_1'$ mit $\mathbb{Q}_1'' \vdash \mathbb{G}$. Wir bilden die Herleitung

$$\mathbb{Q}' \equiv \begin{array}{c} \mathbb{Q}_1'' \\ \vee \\ \alpha' \\ \mathbb{G} \\ \vee \\ \sigma' \\ F \end{array}$$

und ordnen allen Substitutionen von $\mathbb{Q}'$ den selben Rang wie in $\mathbb{Q}$ zu.

Dann ist $K_{k\alpha'} < [\gamma; k]$ für $0 \leq k \leq N$ und nach §3. Lemma 3 b) folgt

$\text{Od}\mathbb{Q}' < \text{Od}\mathbb{Q}$. Die Bedingung 1.2 ist hier trivialerweise erfüllt.

2) P_2 gehört zum Formelbund von F_1 . Dann hat $\mathfrak{P}[F_1]$ die Gestalt $\mathfrak{G}'[F_2, F_1]$, wobei F_2 aus P_1 durch Substitution hervorgegangen ist. Dann sind aber F_1 und F_2 gleichwertig und wir erhalten nach §4. Lemma 4 ein homomorphes Bild $\mathfrak{Q}_2'$ von $\mathfrak{Q}_2$ mit $\mathfrak{Q}_2' \vdash \mathfrak{N}[F_2]$. Wegen $\mathfrak{G}'[F_2,] \vdash G$ und $\mathfrak{N}[] \vdash G$ gilt auch $\mathfrak{N}[F_2] \vdash G$. Nach §4. Lemma 5. gibt es ein homomorphes Bild $\mathfrak{Q}_2''$ von $\mathfrak{Q}_2'$ mit $\mathfrak{Q}_2'' \vdash G$. Wir bilden die Herleitung $\mathfrak{Q}'$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{Q}_2'' \\ \vee \\ \beta' \\ G \\ \vee \\ \sigma' \\ F \end{array}$$

und ordnen allen Substitutionen in $\mathfrak{Q}'$ den selben Rang wie in $\mathfrak{Q}$ zu. Dann erhält $\mathfrak{Q}'$ den selben Rang wie $\mathfrak{Q}$, und wie unter 1) folgt $\text{Od}\mathfrak{Q}' < \text{Od}\mathfrak{Q}$.

Steht $\mathfrak{G}[P_1, P_2]$ oberhalb von $\mathfrak{N}[F_1]$, so verfährt man ganz analog zum eben behandelten Fall.

Lemma 3.

- a) Ist F eine falsche (wahre) numerische Primformel und $\mathfrak{Q}$ eine schnittfreie NH von $\mathfrak{P}[F]$ ($\mathfrak{N}[F]$), so ist $\mathfrak{P}[]$ ($\mathfrak{N}[]$) eine Formel, und es gibt ein homomorphes Bild $\mathfrak{Q}'$ von $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{Q}' \vdash \mathfrak{P}[]$ ($\mathfrak{Q}' \vdash \mathfrak{N}[]$).
- b) Ist F eine falsche (wahre) numerische Primformel und enthält $\mathfrak{P}[F]$ ($\mathfrak{N}[F]$) keine freien I-Variablen, so folgt aus $\Gamma : \alpha : 0 \vdash \mathfrak{P}[F]$ ($\mathfrak{N}[F]$), dass $\mathfrak{P}[]$ ($\mathfrak{N}[]$) eine Formel mit $\Gamma : \alpha : 0 \vdash \mathfrak{P}[]$ ($\mathfrak{N}[]$) ist.

Beweis von a) durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{Q}$.

- 1) $\mathfrak{P}[F]$ ist ein Axiom der Gestalt $\mathfrak{P}'[P]$ oder $\mathfrak{N}'[P]$. Dann ist F von P verschieden und $\mathfrak{P}[]$ ist eine Formel und ein Axiom der gleichen Art. $\mathfrak{P}[F]$ sei ein Axiom der Gestalt $\mathfrak{G}[P_1, P_2]$. Ist F von P_2 verschieden, so ist $\mathfrak{P}[]$ eine Formel und ein Axiom der gleichen Art. Ist F der P -Teil P_2 , so sind P_1 und F gleichwertig und damit ist P_1 eine falsche nume-

rische Primformel und demnach $\mathfrak{P}[\]$ ein Axiom.

2) Ist $\mathfrak{P}[F]$ durch einen Schluss mit Hauptteil erschlossen, so kann F als Primformel nicht der Hauptteil sein und die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der I.V..

3) $\mathfrak{P}[F]$ sei Konklusion einer Substitution. Wird dabei in F nichts substituiert, so folgt die Behauptung sofort aus der I.V.. Sei also F eine Formel $\mathfrak{S}[T]$ und $\mathfrak{P}[F]$ aus $\mathfrak{P}[\mathfrak{S}[U]]$ erschlossen. Da F als numerische Formel vorausgesetzt war, kann T nur ein Zeichen für ein primitiv-rekursives Prädikat sein. Wir ersetzen nun U in der Herleitung von $\mathfrak{P}[\mathfrak{S}[U]]$ durch T . Es ist klar, dass dabei der Herleitungszusammenhang korrekt bleibt und wir ein homomorphes Bild der gleichen Ordnung erhalten. Dann können wir auf diese Herleitung die I.V. anwenden, und erhalten eine schnittfreie NH von $\mathfrak{P}[\]$. Es ist unmittelbar klar, dass diese ein homomorphes Bild von $\mathfrak{S}$ ist.

Analog verfährt man in dem Fall, dass F eine wahre numerische Primformel ist.

Aus dem Beweis von a) ist sofort zu sehen, wie der Beweis für b) zu führen ist.

Lemma 4.

Enthält das Endstück $\mathfrak{G}$ einer NH $\mathfrak{S}$ ein Axiom der Gestalt $\mathfrak{P}[P]$ oder $\mathfrak{N}[P]$, so ist $\mathfrak{S}$ reduzibel.

Beweis.

Enthält $\mathfrak{G}$ keinen Schnitt, so ist $\mathfrak{S}$ reduzibel. Sei also J der oberste Schnitt unterhalb von $\mathfrak{P}[P]$. Dann hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt

$$\mathfrak{S}_1 \left\{ \begin{array}{cc} \mathfrak{P}[P] & \mathfrak{S}_2 \\ \swarrow \searrow & \swarrow \searrow \\ \alpha & \beta \\ \mathfrak{P}'[P'] & \mathfrak{N}'[P'] \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \gamma \\ \mathfrak{G} \\ \swarrow \searrow \\ F \end{array}$$

Wir dürfen wieder annehmen, dass zwischen $\mathfrak{P}[P]$ und F höchstens noch Schnitte und Substitutionen liegen und damit zwischen $\mathfrak{P}[P]$ und J nur noch Substitutionen.

1) Gehört P nicht zum Formelbund von P' , so verfahren wir wie im Fall 1) des Beweises von Lemma 2.

2) Gehört P zum Formelbund von P' , so ist $P \equiv P'$, da P numerisch ist. Wegen $\mathfrak{N}[\] \models G$, gilt $\mathfrak{N}[P] \models P \rightarrow G$ und wir erhalten nach §4. Lemma 5 ein homomorphes Bild $\mathfrak{Q}_2'$ von $\mathfrak{Q}_2$ mit $\mathfrak{Q}_2' \models P \rightarrow G$. Wir bilden die Herleitung

$$\mathfrak{Q}' = \begin{array}{c} \mathfrak{Q}_2' \\ \diagdown \diagup \\ \beta' \\ P \rightarrow G \\ \diagdown \diagup \\ P \rightarrow F \end{array}$$

und ordnen allen Substitutionen den gleichen Rang wie in $\mathfrak{Q}$ zu. Es ist klar, dass dann $\text{Od}\mathfrak{Q}' < \text{Od}\mathfrak{Q}$ gilt. Haben wir eine schnittfreie Herleitung von $P \rightarrow F$, so folgt aus Lemma 3 die Existenz einer schnittfreien NH von F . Somit ist $\mathfrak{Q}$ reduzibel.

2. Ein Schnitt $\mathfrak{P}[F], \mathfrak{N}[F] \vdash G$ heisst geeignet in einer NH $\mathfrak{Q}$, wenn beide Formelbünde von F den Hauptteil eines Begrenzungsschlusses enthalten.

Lemma 5.

Enthält das Endstück $\mathfrak{E}$ einer NH $\mathfrak{Q}$ kein Axiom, so enthält es einen geeigneten Schnitt.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl der Schnitte in $\mathfrak{E}$.

Da $\mathfrak{E}$ kein Axiom enthält, ist $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{Q}$ und damit enthält $\mathfrak{E}$ mindestens einen Schnitt. Sei J der unterste Schnitt in $\mathfrak{E}$. Ist J bereits geeignet, so sind wir fertig. Ist J nicht geeignet, so gibt es eine NH $\mathfrak{Q}_1$ einer Prämisse von J , in der kein Hauptteil eines Schlusses zu Formelbund der Schnittformel von J gehört. Dann liegt aber das Endstück

von $\mathfrak{S}_1$ ganz im Endstück von $\mathfrak{S}$. Damit enthält auch das Endstück von $\mathfrak{S}_1$ kein Axiom und nach I.V. einen geeigneten Schnitt. Dieser ist ist auch in $\mathfrak{S}$ geeignet.

Lemma 6.

Enthält das Endstück einer NH $\mathfrak{S}$ einen geeigneten Schnitt, so ist $\mathfrak{S}$ reduzibel.

Beweis.

Da J ein geeigneter Schnitt ist, ist die Schnittformel G von J keine Primformel. Je nach der Gestalt von G unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1) G ist eine Formel $F_1 \rightarrow F_2$

Dann hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mathfrak{S}_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{S}_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \beta \end{array} \\
 \mathfrak{P}[F_1 \rightarrow F_2] \qquad \mathfrak{N}[F_1 \rightarrow F_2] \\
 \hline
 \begin{array}{c} \gamma \\ G_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ F \end{array} \qquad J
 \end{array}$$

Nach §4. Lemma 3 a) erhalten wir NHn $\mathfrak{S}_2' \vdash \mathfrak{N}[F_1]$ und $\mathfrak{S}_2'' \vdash \mathfrak{N}[F_2]$.

Wir bilden die Herleitung $\mathfrak{S}'$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mathfrak{S}_2' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \beta'' \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{S}_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \alpha \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{S}_2'' \\ \diagdown \quad \diagup \\ \beta' \end{array} \\
 \mathfrak{N}[\neg F_1] \qquad \mathfrak{P}[F_1 \rightarrow F_2] \qquad \mathfrak{N}[F_2] \\
 \hline
 \begin{array}{c} \gamma' \\ F_1 \rightarrow G_1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \gamma'' \\ G_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ F \end{array}
 \end{array}$$

und ordnen jeder Substitution in $\mathfrak{S}'$ den gleichen Rang wie in $\mathfrak{S}$ zu. Dann haben $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ den selben Rang N . Nach §4. Lemma 1 gilt $K_K \beta' \leq [\beta; k]$ und $K_K \beta'' \leq [\beta; k]$ für $0 \leq k \leq N$. Sind n_1, n_2 und n die Längen von F_1, F_2 bzw. G , so ist $\gamma' = (n_2, \alpha \# \beta')$, $\gamma'' = (n_1, \gamma' \# \beta'')$ und $\gamma = (n, \alpha \# \beta)$. Da $n_1 < n$ und $n_2 < n$ sind folgt dann $K_K \beta' < [\gamma; k]$ und $K_K \gamma' < [\gamma; k]$ und damit $K_K \gamma'' < [\gamma; k]$ für $0 \leq k \leq N$. Nach §3. Lemma 3 b) folgt daraus $Od \mathfrak{S}' < Od \mathfrak{S}$.

2) Ist G eine Formel $(t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n]$, so verfährt man ähnlich, indem man §4. Lemma 3 d) benützt.

3) G ist eine Formel $\forall x \mathfrak{F}[x]$. Dann hat $\mathfrak{S}$ die Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 \dots & \mathfrak{S}_z & \dots \\
 & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \alpha_z \end{array} & \\
 \dots & \mathfrak{P}'[\mathfrak{U}_1[z]] & \dots \\
 \hline
 & \beta & \\
 & \mathfrak{P}'[\forall x \mathfrak{U}_1[x]] & \\
 & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \rho \end{array} & \\
 & \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{F}[x]] & \\
 \hline
 & \tau & \\
 & G_1 & \\
 & \diagdown \diagup & \\
 & F &
 \end{array}
 \quad J_1
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{S}^* & \\
 & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \gamma \end{array} & \\
 & \mathfrak{U}_2[z] \rightarrow \mathfrak{N}'[\forall x \mathfrak{U}_2[x]] & \\
 \hline
 & \delta & \\
 & \mathfrak{N}'[\forall x \mathfrak{U}_2[x]] & \\
 & \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \varepsilon \end{array} & \\
 & \mathfrak{N}[\forall x \mathfrak{F}[x]] & \\
 \hline
 & J &
 \end{array}
 \quad J_2$$

In der Prämisse von J_2 ist z eine Ziffer. Diese kommt unter den Prämissen von J_1 vor. Nach §4. Lemma 5 erhalten wir eine NH $\mathfrak{S}'_z$ mit $\mathfrak{S}'_z \vdash \neg \mathfrak{U}_1[z] \rightarrow \mathfrak{P}'[\forall x \mathfrak{U}_1[x]]$. Wir dürfen wieder annehmen, dass zwischen J_1 und F , sowie zwischen J_2 und F keine Schlüsse mit Hauptteil mehr liegen, da diese explizit sein müssten und $\mathfrak{S}$ dann bereits reduzibel wäre. Wir bilden nun die folgende Herleitung $\mathfrak{S}'$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \S_z' \\ \diagdown \diagup \\ \alpha \\ \neg \S_1[z] \rightarrow \beta' [\forall x \S_1[x]] \\ \diagdown \diagup \\ \rho' \\ \neg \S[z] \rightarrow \beta [\forall x \S[x]] \end{array} &
 \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \varepsilon \\ \S [\forall x \S[x]] \end{array} &
 \begin{array}{c} \begin{array}{c} \S^* \\ \diagdown \diagup \\ \gamma \\ \S_2[z] \rightarrow \eta' [\forall x \S_2[x]] \\ \diagdown \diagup \\ \varepsilon' \\ \S[z] \rightarrow \eta [\forall x \S[x]] \end{array} \\ \hline \neg \S[z] \xrightarrow{\mu} G_1 \end{array} & &
 \begin{array}{c} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \rho \\ \beta [\forall x \S[x]] \end{array} \\ \hline \S[z] \xrightarrow{v} G_1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \tau' \\ G_1 \\ \diagdown \diagup \\ F \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

und ordnen jeder Substitution den gleiche Rang wie in $\S$ zu. Offenbar erhalten dann $\S$ und $\S'$ den gleichen Rang N . Da zwischen G_1 und F keine $(S2, o)^*$ -Schlüsse mehr liegen, genügt es zu zeigen, dass $K_k \tau' < [\tau; k]$ für $0 \leq k \leq N$ gilt, denn dann folgt nach §3. Lemma 3 b) $Od \S' < Od \S$. Es ist $K_k \alpha < [\beta; k]$ und $K_k \gamma < [\delta; k]$. Daraus folgt nach §3. Lemma 3 b) $K_k \rho' < [\rho; k]$ und $K_k \varepsilon' < [\varepsilon; k]$. Seien n_1 und n die Längen von $\S[z]$ bzw. $\forall x \S[x]$. Dann ist $\mu = (n, \rho' \# \varepsilon)$ und $v = (n, \rho \# \varepsilon')$ und es folgt $K_k \mu < [\rho; k]$ und $K_k v < [\varepsilon; k]$. Nun ist $\tau' = (n_1, \mu \# v)$ und $\tau = (n, \rho \# \varepsilon)$. Für $k = N$ ist $\tau' < \tau$ zu zeigen. Da $n_1 < n$ ist genügt es dafür nachzuweisen, dass $\mu \# v < \tau$ ist. Dies folgt aber sofort aus $\mu < \rho$ und $v < \varepsilon$. Ist $k < N$, so ist $K_k \tau' = \{1\} \cup K_k \mu \cup K_k v = \{1\} \cup K_k \rho' \cup K_k \varepsilon \cup K_k \rho \cup K_k \varepsilon'$. Wegen $K_k \varepsilon \cup K_k \rho \subset K_k [\tau; k+1]$ bleibt zu zeigen, dass $K_k \rho' < [\tau; k]$ und $K_k \varepsilon' < [\tau; k]$ ist. Dies folgt aber aus $K_k \rho' < [\rho; k] < [\tau; k]$ und $K_k \varepsilon' < [\varepsilon; k] < [\tau; k]$.

4) G ist eine Formel der Gestalt $\forall x \S[x]$. $\S$ hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \mathfrak{G}_1 \\
 \Downarrow \\
 \alpha \\
 \frac{\mathfrak{P}'[\mathfrak{U}_1[U]]}{\alpha_1} \quad J_1 \\
 \mathfrak{P}'[\forall X \mathfrak{U}_1[X]] \\
 \Downarrow \\
 \alpha_2 \\
 \mathfrak{P}[\forall X \mathfrak{U}[X]]
 \end{array}
 &
 &
 \begin{array}{c}
 \mathfrak{G}_2 \\
 \Downarrow \\
 \beta \\
 \frac{\mathfrak{U}_2[T] \rightarrow \mathfrak{N}'[\forall X \mathfrak{U}_2[X]]}{\beta_1} \quad J_2 \\
 \mathfrak{N}'[\forall X \mathfrak{U}_2[X]] \\
 \Downarrow \\
 \beta_2 \\
 \mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{U}[X]]
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \delta \\
 G_1 \\
 \Downarrow \\
 \sigma \\
 G_2 \\
 \Downarrow \\
 F
 \end{array}
 \end{array}$$

Dabei sei der Rang von $\forall X \mathfrak{U}[X]$ gleich $i+1$ und G_2 die Prämisse der obersten Substitution unterhalb von G_1 , deren Rang $\leq i$ ist, falls eine solche existiert, anderenfalls sei G_2 die Endformel. Wie vorher dürfen wir annehmen, dass unterhalb von J_1 und J_2 höchstens noch Substitutionen und Schnitte liegen. Wir zeigen noch einige Eigenschaften von $\mathfrak{G}$.

(1) Die Nennformen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}$ stimmen überein.

Beweis. Angenommen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}$ würden nicht übereinstimmen. Dann gäbe es zwischen J_1 und J eine Substitution S , deren Eigenvariable in $\mathfrak{U}_1$ auftritt. Dann beeinträchtigt S die Formel $\forall X \mathfrak{U}_1[X]$, woraus $r(S) < r(\forall X \mathfrak{U}_1[X])$ folgt. Andererseits wäre $\forall X \mathfrak{U}_1[X]$ ein impliziter Minimalteil der Prämisse von S , woraus $r(\forall X \mathfrak{U}_1[X]) < r(S)$ folgen müsste. Dann wäre $\mathfrak{G}$ aber keine NH. Analog folgert man, dass $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}$ übereinstimmen.

(2) Zwischen G_1 und G_2 liegen keine Substitutionen, die $\forall X \mathfrak{U}[X]$ beeinträchtigen.

Beweis. Läge dort eine solche Substitution S , so müsste $i+1 = r(G) >$

$r(S)$ gelten. Nach der Definition von G_1 gilt aber $r(S) \geq i+1$.

Wir bilden nun die folgend Herleitung $\mathfrak{S}'$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \mathfrak{S}_1' \\ \Downarrow \\ \alpha' \end{array} \quad \neg \forall X \mathfrak{U}[X] \rightarrow \mathfrak{P}'[\mathfrak{U}] \\
 \begin{array}{c} \mathfrak{S}_2 \\ \Downarrow \\ \beta \end{array} \quad \mathfrak{U}[T] \rightarrow \mathfrak{N}'[\forall X \mathfrak{U}[X]] \\
 \hline
 \begin{array}{c} \alpha_2' \\ \Downarrow \\ \neg \forall X \mathfrak{U}[X] \rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{U}] \end{array} \quad \mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{U}[X]] \quad J_1' \\
 \hline
 \begin{array}{c} \delta' \\ \neg \mathfrak{U}[U] \rightarrow G_1 \\ \Downarrow \\ \sigma' \\ \neg \mathfrak{U}[U] \rightarrow G_2 \\ \hline \neg \mathfrak{U}[T] \rightarrow G_2 \quad S \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathfrak{S}_2 \\ \Downarrow \\ \beta \\ \mathfrak{U}[T] \rightarrow \mathfrak{N}'[\forall X \mathfrak{U}[X]] \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \delta'' \\ \neg G_2 \rightarrow \mathfrak{N}'[\forall X \mathfrak{U}[X]] \\ \Downarrow \\ \beta_2' \\ \neg G_2 \rightarrow \mathfrak{N}[\forall X \mathfrak{U}[X]] \end{array} \quad J'' \\
 \hline
 \begin{array}{c} \alpha_2 \\ \Downarrow \\ \mathfrak{P}[\forall X \mathfrak{U}[X]] \end{array} \quad \begin{array}{c} \delta''' \\ \neg G_2 \rightarrow G_1 \\ \Downarrow \\ \sigma'' \\ \neg G_2 \rightarrow G_2 \\ \Downarrow \\ \neg F \rightarrow F \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

Wir ordnen allen Substitutionen in $\mathfrak{S}'$ mit Ausnahme von S den selben Rang wie in $\mathfrak{S}$ und S den Rang $i+1$ zu.

(3) $\mathfrak{S}'$ ist eine NH vom gleichen Rang wie $\mathfrak{S}$.

Beweis. Da in $\mathfrak{S}'$ die gleichen Minimalteile auftreten wie in $\mathfrak{S}$, genügt es offenbar zu zeigen, dass $r_{\mathfrak{S}'}(\neg \mathfrak{U}[U] \rightarrow G_2) < i+1$ ist, denn dann ist $\mathfrak{S}'$ eine Herleitung mit Rangzuordnung vom Rang $N = R(\mathfrak{S})$ und da keine neuen $(S2, o)^*$ -Schlüsse hinzukommen auch eine NH.

Nach der Definition von G_2 ist $r_{\mathfrak{G}}(G_2) < i+1$ und damit auch $r_{\mathfrak{G}_1}(G_2) < i+1$. Weiterhin ist $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U}[U]) < i+1$. Beeinträchtigt eine Substitution, die nicht S ist, $\mathfrak{U}[U]$ in $\mathfrak{G}'$, so beeinträchtigt die ihr entsprechende Substitution auch $\mathfrak{U}[U]$ in $\mathfrak{G}$. S kann $\mathfrak{U}[U]$ nicht beeinträchtigen, da sonst U im Bereich eines P -Quantors von $\mathfrak{U}[U]$ stünde und damit die Formel $\forall X \mathfrak{U}[X]$ nicht einfach wäre. Das steht im Widerspruch zur Normalherleitungseigenschaft von $\mathfrak{G}$. Damit ist $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U}[U]) = r_{\mathfrak{G}_1}(\mathfrak{U}[U])$ und folglich auch $r_{\mathfrak{G}_1}(\neg \mathfrak{U}[U] \rightarrow G_2) < i+1$.

Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, dass $\text{Od } \mathfrak{G}' < \text{Od } \mathfrak{G}$ ist, denn aus der Existenz einer schnittfreien NH von $\neg F \rightarrow F$ folgt nach §4. Lemma 5 die Existenz einer schnittfreien NH von F .

(4) Zwischen α' und σ' sowie β und σ' liegen höchstens Substitutionen eines Ranges $> i+1$.

Beweis. Jede Substitution zwischen α' und α_2' enthält $\forall X \mathfrak{U}[X]$ als Minimalteil der Prämisse und hat daher einen Rang $> i+1$. Zwischen δ' und σ' liegen nach der Definition von G_2 keine Substitutionen eines Ranges $> i+1$.

(5) Zwischen δ'' und σ'' liegen keine Substitutionen eines Ranges $\leq i+1$.

Beweis. Dies folgt mit den gleichen Argumenten wie bei (4).

(6) $K_k \alpha' < [\alpha_1; k]$ für $0 \leq k \leq N$

Beweis. $\mathfrak{G}_1'$ ist homorphes Bild von $\mathfrak{G}_1$. Also gilt $K_k \alpha' \leq [\alpha; k] < [\alpha_1; k]$.

(7) $K_k \delta' < [\delta; k]$ für $0 \leq k \leq N$

Beweis. Aus (6) folgt mit §3. Lemma 3 b) $K_k \alpha_2' < [\alpha_2; k]$. Daraus erhalten wir $\delta' = (n, \alpha_2' \# \beta_2) < (n, \alpha_2 \# \beta_2) = \delta$ und $K_k \delta' = \{1\} \cup K_k \alpha_2' \cup K_k \beta_2 < [(n, \alpha_2 \# \beta_2); k] < [\delta; k]$ für $0 \leq k < N$, wenn n die Länge von $\forall X \mathfrak{U}[X]$ ist.

(8) $K_k \delta'' < [\beta_1; k]$ für $i < k \leq N$

Beweis. Es ist $\delta'' = (m, v \# \beta)$ und $\beta_1 = (m+1, \beta)$, wenn m die Länge von $\mathfrak{U}[T]$ ist. Für $k = N$ ist wegen $m < m+1$ nur noch $v \# \beta < \beta_1$ zu zeigen.

$\beta < \beta_1$ ist sofort klar. Es ist $v = (0, \Omega_N \# [\sigma'; i])$. Wegen $0 < m+1$ bleibt $\Omega_N \# [\sigma'; i] < \beta_1$ zu zeigen. Dies folgt jedoch wegen $i < N$ aus $[\sigma'; i] < \Omega_N < \beta_1$. Für $i < k < N$ ist $K_k \delta'' = \{1\} \cup K_k v \cup K_k \beta = \{1\} \cup \{[\sigma'; i]\} \cup K_k \beta$. $\{1\} \cup K_k \beta < [\beta_1; k]$ ist klar. $[\sigma'; i] < [\beta_1; k]$ folgt wegen $i < k$.

(9) $K_k \delta''' < [\delta; k]$ für $i < k \leq N$

Beweis. Es ist $\delta''' = (n, \alpha_2 \# \beta_2')$ und $\delta = (n, \alpha_2 \# \beta_2)$. Aus (8) folgt mit (5) und §3. Lemma 3 b) $K_k \beta_2' < [\beta_2; k]$ für $i < k \leq N$. Daraus folgt sofort $\delta''' < \delta$. Für $i < k < N$ ist $K_k \delta''' = \{1\} \cup K_k \alpha_2 \cup K_k \beta_2'$. $\{1\} \cup K_k \alpha_2 < [\delta; k]$ ist klar und es gilt ferner $K_k \beta_2' < [\beta_2; k] < [\delta; k]$ für $i < k < N$.

(10) $K_k \sigma'' < [\sigma; k]$ für $0 \leq k \leq N$

Beweis. Für $i < k \leq N$ folgt die Behauptung sofort aus (9) und (5) mit §3. Lemma 3 b). Sei also $0 \leq k \leq i$. Nach (5) und §3. Lemma 3 a) gilt $K_k \sigma'' - K_k \delta''' \subset K_k \sigma$. Damit ist $K_k \sigma'' - K_k \delta''' < [\sigma; k]$. Zu zeigen bleibt $K_k \delta''' < [\sigma; k]$. Es ist $K_k \delta''' = \{1\} \cup K_k \alpha_2 \cup K_k \beta_2'$ und es gilt $K_k \alpha_2 \subset K_k \delta$. Damit folgt $K_k \alpha_2 < [\delta; k] < [\sigma; k]$ für $0 \leq k \leq i$. Nun ist $K_k \beta_2' - K_k \delta'' \subset K_k \beta_2$. Für $\xi \in K_k \beta_2' - K_k \delta''$ gilt daher $\xi < [\beta_2; k] < [\delta; k] < [\sigma; k]$. Sei also $\xi \in K_k \delta'' = \{1\} \cup K_k v \cup K_k \beta$. Für $\xi \in K_k \beta$ folgt wieder $\xi < [\beta; k] < [\beta_2; k] < [\sigma; k]$. Für $\xi \in K_k v$ unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $k=i$, so ist $\xi = (0, [\sigma'; i])$. Aus (7) folgt $[\sigma'; i] < [\sigma; i]$ und damit $\xi < [\sigma; i]$. Ist $k < i$, so ist $K_k v = K_k \sigma'$ und $K_k \sigma' < [\sigma; k]$ folgt aus (7).

Mit (10) folgt nun $Od\delta' < Od\delta$. Damit ist der Beweis von Lemma 6 abgeschlossen.

Lemma 7.

Jede NH ist reduzibel.

Beweis. Dies folgt sofort aus Lemma 4 und Lemma 6.

Lemma 8.

Zu jeder NH $\mathfrak{Q}$ gibt es eine schnittfreie NH $\mathfrak{Q}'$ der selben Endformel mit $K_k \mathfrak{O}\mathfrak{Q}' \leq [\mathfrak{O}\mathfrak{Q}; k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Dies folgt aus Lemma 7 durch Induktion nach $\text{Od}\mathfrak{Q}$.

Lemma 9.

Ist $\mathfrak{Q} \vdash F$ eine schnittfreie NH des Ranges N, sind $T_1, \dots, T_n$ alle P-Terme, die in $\mathfrak{Q}$ substituiert werden, und gibt es eine P-Menge Γ , so dass für alle Eigenausdrücke T von $\mathfrak{Q}$ $T \in \Gamma$ gilt, so folgt $\Gamma(T_1, \dots, T_n): (\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N): 0 \vdash F$.

Beweis durch Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{Q}$.

- 1) Ist F ein Axiom, so ist die Behauptung trivial.
- 2) F sei durch einen Schluss J erschlossen. Da alle anderen Fälle sich sofort aus der I.V. ergeben, behandeln wir nur den Fall, dass J eine Substitution ist. Sei also F eine Formel $\mathfrak{F}[T_N]$, die aus $\mathfrak{F}[U]$ erschlossen wurde und $\beta = \mathfrak{O}\mathfrak{F}[U]$. Nach I.V. folgt dann

$\Gamma(T_1, \dots, T_{n-1}): ([\beta; 0], \Omega_N): 0 \vdash \mathfrak{F}[U]$ und daraus nach §2.Lemma 4 b)
 $\Gamma(T_1, \dots, T_n): (0, ([\beta; 0], \Omega_N)): 0 \vdash \mathfrak{F}[T_N]$. Nun ist $\text{Od}\mathfrak{Q} = (0, [\beta; 1] * \Omega_N)$.
 Zu zeigen ist $K_k(0, ([\beta; 0], \Omega_N)) \leq [(\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N); k]$.

2.1) Für $k=N$ ist $(0, ([\beta; 0], \Omega_N)) \leq (\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N)$ nachzuweisen. Wegen $0 < \text{Od}\mathfrak{Q}$ bleibt $([\beta; 0], \Omega_N) \leq (\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N)$ zu zeigen. Nach §3.Lemma 2 gilt aber $[\beta; 0] < \text{Od}\mathfrak{Q}$ und es ist $\Omega_N < (\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N)$ und $K_N[\beta; 0] = \{[\beta; 0]\} < (\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N)$.
 Damit ist dieser Fall bewiesen.

2.2) Es sei $0 < k < N$. Dann ist $K_k(0, ([\beta; 0], \Omega_N)) = \{[\beta; 0]\}$ und die Behauptung ist trivial.

2.3) Für $k=0$ ist $[\beta; 0] \leq [(\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N); 0]$ zu zeigen. Es ist $[\beta; 0] < \text{Od}\mathfrak{Q}$, und $\text{Od}\mathfrak{Q} < [(\text{Od}\mathfrak{Q}, \Omega_N); 0]$ und damit ist auch dieser Fall bewiesen.

Satz.

Gilt $\Gamma: \alpha: \omega.n+m \vdash F$, und ist F einfach, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma''([(\omega, (n+1, \alpha^*)); 0], \Omega_N): 0 \vdash F$. (Dabei sei α^* wie in §3.

Lemma 4 definiert.)

Beweis.

F sei eine Formel $\mathfrak{F}[u_1, \dots, u_1]$, so dass in $\mathfrak{F}$ keine freien I-Variablen mehr auftreten. Nach §2.Lemma 8 gibt es ein $m_0 < \omega$ mit $\Gamma': (n+1, \alpha): m_0 \vdash F$. Dann gilt auch $\Gamma': (n+1, \alpha): m_0 \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_1]$ für jedes i-tupel von Ziffern. Nach §3.Lemma 4 gibt es eine NH $\mathfrak{G} \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_1]$ vom Rang $N = m_0.l(\Gamma')$ mit $0\mathfrak{G} \leq (\omega, (n+1, \alpha^*))$. Dazu gibt es nach Lemma 8 eine schnittfreie NH der gleichen Ordinalzahl und Endformel. Damit gilt nach Lemma 9 $\Gamma''([(\omega, (n+1, \alpha^*)); 0], \Omega_N): 0 \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_1]$. Durch i-faches Anwenden der unendlichen Induktion folgt dann die Behauptung.

Kapitel III

Eine Grenze für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion im schwachen Π_1^1 Fragment der Analysis

§1. Das formale System Π

1. Die Sprache von Π ist diejenige von Π^* . Wir nennen eine Formel glatt, wenn sie keinen Quantor und keinen minimalen N-Teil der Gestalt $A \rightarrow B$ enthält. Eine Formel $\mathfrak{U}[u_1, \dots, u_n]$ heisst verifizierbar, wenn für je n Ziffern $z_1, \dots, z_n$ $\mathfrak{U}[z_1, \dots, z_n]$ eine wahre numerische Formel ist.

2. Axiome von Π

2.1 Jede verifizierbare glatte Formel ist ein Axiom von Π .

2.2 Jede Formel der Gestalt $\mathfrak{G}[P_1, P_2]$ ist ein Axiom, wenn P_1 und P_2 gleichwertige Primformeln sind.

3. Grundschlussregeln

(S1) $\mathfrak{A}[\neg A], \mathfrak{A}[B] \vdash \mathfrak{A}[A \rightarrow B]$

(S2,0) $\mathfrak{A}[\mathfrak{U}[u]] \vdash \mathfrak{A}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$
 (S2,1) $\mathfrak{A}[\mathfrak{U}[U]] \vdash \mathfrak{A}[\forall X \mathfrak{U}[X]]$ } mit Variablenbedingung

(S3,0) $\mathfrak{U}[t] \rightarrow \mathfrak{A}[\forall x \mathfrak{U}[x]] \vdash \mathfrak{A}[\forall x \mathfrak{U}[x]]$

(S3,1) $\mathfrak{U}[T] \rightarrow \mathfrak{A}[\forall X \mathfrak{U}[X]] \vdash \mathfrak{A}[\forall X \mathfrak{U}[X]]$

(S4) $\mathfrak{G}[\mathfrak{U}[t_1, \dots, t_n]] \vdash \mathfrak{G}[(t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n]]$
 falls $\lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{U}[x_1, \dots, x_n]$ definiert ist.

(S5)' $A, A \rightarrow B \vdash B$ (modus ponens)

(VI) $\mathfrak{U}[0], \mathfrak{U}[a] \rightarrow \mathfrak{U}[a'] \vdash \mathfrak{U}[t]$, falls a nicht in $\mathfrak{U}$ auftritt und $\mathfrak{U}[0]$ eine einfache Formel ist. (Vollständige Induktion)

Bemerkung: Wie in [1] bemerkt, ist das System Π ohne die Einschränkung der vollständigen Induktion einem System der Analysis mit Π_1^1 -Komprehension äquivalent. Wegen der Einschränkung der vollständigen

Induktion wollen wir es als schwaches Π_1^1 Fragment der Analysis bezeichnen.

4. Eine Herleitung von Π ist eine endliche Formelmeng $\mathfrak{S}$ mit einer Unterformelrelation μ , so dass gilt:

- 4.1 Jede Formel $F \in \mathfrak{S}$, die kein Axiom ist, ist die Konklusion eines Grundschlusses gemäss (S1) - (S5)' oder (VI), wobei für jede Prämisse G des Grundschlusses $G \in \mathfrak{S}$ und $G \mu F$ gilt.
- 4.2. Es gibt genau eine Formel $F \in \mathfrak{S}$, für die es kein G mit $F \mu G$ gibt.

Die Endformel einer Herleitung ist wie in II. §3.2 definiert und wir verwenden wieder die Abkürzung $\mathfrak{S} \vdash F$.

Eine Formel heisst herleitbar in Π , wenn es eine Herleitung $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S} \vdash F$ gibt.

Lemma 1.

Das System Π ist aussagenlogisch und prädikatenlogisch abgeschlossen.

Lemma 2.

Jede verifizierbare Formel ist in Π herleitbar.

Lemma 3.

Jede Formel der Gestalt $\mathfrak{G}[(t_1, \dots, t_n) \in \lambda x_1 \dots x_n \mathfrak{F}[x_1, \dots, x_n], \mathfrak{F}[t_1, \dots, t_n]]$ ist in Π herleitbar.

5. Die Junktoren $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ und den Quantor $\exists$ sehen wir als in der üblichen Weise definiert an. Für n -stellige P-Terme T_1 und T_2 kürze $T_1 = T_2$ die Formel $\forall x_1 \dots \forall x_n ((x_1, \dots, x_n) \in T_1 \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \in T_2)$ ab.

Folgerung:

Die Formel $T_1 = T_2 \rightarrow (\mathfrak{F}[T_1] \leftrightarrow \mathfrak{F}[T_2])$ ist herleitbar in Π .

Lemma 4.

Die Schlussregel

$(\forall I)' \quad \forall x (x < a \rightarrow \mathfrak{F}[x]) \rightarrow \mathfrak{F}[a] \quad \vdash \quad \mathfrak{F}[t]$

ist zulässig in Π , falls a nicht in $\mathfrak{F}$ auftritt und $\mathfrak{F}[a]$ einfach ist.

§2. Widerspruchsfreiheit von Π

Lemma 1.

Ist eine Formel F in Π herleitbar, so gibt es eine P -Menge Γ , ein $\alpha \in \Sigma^1(1)$ der Stufe 1 mit $K_K \alpha < [(\omega, \Omega_1); k]$ für $k \in \mathbb{N}$ und ein $\eta < \omega^2$, so dass $\Gamma: \alpha: \eta \vdash F$ gilt.

Beweis durch Induktion nach der Länge der Herleitung von F .

- 1) F sei ein Axiom. Ist F eine Formel der Gestalt $\mathfrak{C}[P_1, P_2]$, so ist F auch ein Axiom von Π^* und die Behauptung ist klar. Ist F eine verifizierbare glatte Formel $\mathfrak{F}[u_1, \dots, u_n]$, so ist für alle n -tupel $z_1, \dots, z_n$ von Ziffern $\mathfrak{F}[z_1, \dots, z_n]$ ein Axiom von Π^* . Durch n -faches Anwenden der unendlichen Induktion folgt $\Gamma: \Omega_1 \cdot (n+1): 0 \vdash F$ für jede P -Menge Γ .
- 2) F sei Konklusion eines Grundschlusses, der nicht gemäss $(S2, 0)$, $(S3, 1)$, $(S5)'$ oder (VI) erfolgte, mit den Prämissen F_1 ($i = 1, 2$). Nach IV gibt es Γ_1 , α_1 und η_1 mit $\Gamma_1: \alpha_1: \eta_1 \vdash F_1$ und mit dem gleichen Grundschluss folgt $\Gamma: \alpha: \eta \vdash F$, wobei $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\alpha = \alpha_1 * \alpha_2$ bzw. $\alpha_1 \# \Omega_1$, falls nur eine Prämisse vorliegt, und $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$ ist.
- 3) F sei Konklusion eines Grundschlusses $(S2, 0)$ mit der Prämisse $\mathfrak{P}[\mathfrak{F}[u]]$. Nach I.V. gilt $\Gamma_1: \alpha_1: \omega \cdot n + m \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{F}[u]]$. Ist $\mathfrak{P}[\mathfrak{F}[u]]$ nicht einfach, so erhalten wir mit einem $(S2, 0)$ -Schluss die Behauptung. Sei also $\mathfrak{P}[\mathfrak{F}[u]]$ einfach. Dann gibt es nach II. §2. Lemma 8 eine P -Menge Γ und ein $m_0 < \omega$ mit $\Gamma: (n+1, \alpha_1): m_0 \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{F}[u]]$ und damit folgt $\Gamma: (n+1, \alpha_1): m_0 \vdash \mathfrak{P}[\mathfrak{F}[z]]$ für jede Ziffer z . Mit einem Grundschluss $(S2, 0)^*$ folgt $\Gamma: (n+1, \alpha_1) \# \Omega_1: m_0 \vdash \mathfrak{P}[\forall x \mathfrak{F}[x]]$. Nach I.V. gilt $K_K \alpha_1 < [(\omega, \Omega_1); k]$ und daraus folgt auch $K_K(n+1, \alpha_1) \# \Omega_1 < [(\omega, \Omega_1); k]$.

- 4) F sei Konklusion eines $(S3,1)$ -Schlusses mit der Prämisse $\mathfrak{F}[T] \rightarrow F$. Nach I.V. gibt es dann Γ_1, α_1 und η mit $\Gamma_1: \alpha_1: \eta \vdash \mathfrak{F}[T] \rightarrow F$. Daraus folgt aber mit einem $(S3,1)$ -Schluss sofort $\Gamma_1(T): \alpha_1 \# \Omega_1: \eta \vdash F$.
- 5) F sei Konklusion eines $(S5)'$ -Schlusses mit den Prämissen F_1 und $F_1 \rightarrow F$. Dann gibt es nach I.V. $\Gamma_1, \Gamma_2, \alpha_1, \alpha_2, \eta_1$ und η_2 mit $\Gamma_1: \alpha_1: \eta_1 \vdash F_1$ und $\Gamma_2: \alpha_2: \eta_2 \vdash F_1 \rightarrow F$. Mit einem Schnitt folgt $\Gamma: \alpha: \eta \vdash F$ mit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \alpha = \alpha_1 \# \alpha_2$ und $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2, G(F_1) + 1\}$.

6) F sei eine Formel $\mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, t[u_1, \dots, u_p]]$, die Konklusion eines Schlusses gemäss (VI) mit den Prämissen $\mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, 0]$ und $\mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a] \rightarrow \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a']$ ist. Dann sind beide Prämissen einfach. Nach I.V. gilt dann $\Gamma_1: \alpha_1: \omega.n_1 + m_1 \vdash \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, 0]$ und $\Gamma_2: \alpha_2: \omega.n_2 + m_2 \vdash \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a] \rightarrow \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a']$. Nach II. §2. Lemma 8 gibt es dann $\Gamma_3, \Gamma_4, m_3 < \omega$ und $m_4 < \omega$ mit

- (a) $\Gamma_3: (n_1 + 1, \alpha_1): m_3 \vdash \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, 0]$ und
 (b) $\Gamma_4: (n_2 + 1, \alpha_2): m_4 \vdash \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a] \rightarrow \mathfrak{F}[u_1, \dots, u_p, a']$.

Sei $z_1, \dots, z_p$ ein p -tupel von Ziffern. Dann hat $t[z_1, \dots, z_p]$ einen Ziffernwert z_0 . Aus (a) folgt $\Gamma_3: (n_1 + 1, \alpha_1): m_3 \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, 0]$ und aus (b) $\Gamma_4: (n_2 + 1, \alpha_2): m_4 \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, z] \rightarrow \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, z']$ für jede Ziffer z . Durch z_0 -faches Anwenden der Schnittregel erhalten wir daraus $\Gamma: \beta \# \Omega_1.z_0: m \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, z_0]$, mit $\Gamma = \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \beta = (n_1 + 1, \alpha_1) \# (n_2 + 1, \alpha_2)$ und $m = \max\{m_3, m_4, G(\mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, 0])\} < \omega$, denn $\mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, 0]$ ist einfach. Da z_0 und $t[z_1, \dots, z_p]$ gleichwertig sind, folgt $\Gamma: \beta \# \Omega_1.z_0: m \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, t[z_1, \dots, z_p]]$. Damit gilt für jedes p -tupel $z_1, \dots, z_p$ von Ziffern $\Gamma: \beta \# (0, \Omega_1): m \vdash \mathfrak{F}[z_1, \dots, z_p, t[z_1, \dots, z_p]]$. Durch p -faches Anwenden der unendlichen Induktion folgt damit $\Gamma: \beta \# (0, \Omega_1) \# \Omega_1.p: m \vdash F$. Nach I.V. gilt $K_k \alpha_1 < [(\omega, \Omega_1); k]$ ($i = 1, 2$) und damit rechnet man leicht nach, dass auch $K_k \beta \# (0, \Omega_1) \# \Omega_1.p < [(\omega, \Omega_1); k]$ gilt.

Satz:

Das System Π ist widerspruchsfrei.

Beweis.

Angenommen Π wäre widerspruchsvoll. Dann wäre die Formel $0=0'$ in Π herleitbar. Nach dem Lemma 1 gäbe es dann Γ , α und η mit $\Gamma:\alpha:\eta \vdash 0=0'$. Mit dem Satz aus II.§5 würde daraus aber $\Gamma':\gamma:0 \vdash 0=0'$ für das dort bezeichnete γ folgen. $0=0'$ ist aber eine falsche numerische Primformel, so dass nach II.§5.Lemma 3 b) folgen müsste, dass die leere Zeichenreihe eine Formel ist. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Formeln.

§3. Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion bis σ_0 in Π und Π^*

1. Es sei $\varphi:\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ eine primitiv-rekursive Abbildung mit $\varphi 0 = 0$. Wir definieren ein zweistelliges primitiv-rekursives Prädikat durch: $z_1 < z_2$ treffe genau dann zu, wenn $\varphi^{-1} z_1 < \varphi^{-1} z_2$ ist, und eine 1-stellige primitiv-rekursive Funktion s durch $s(z) = S(\varphi^{-1} z)$. Es sei $Q[U, u]$ die Formel $\forall x(x < u \rightarrow x \in U)$, $\text{Pr}[U]$ sei die Formel $\forall x(Q[U, x] \rightarrow x \in U)$ und $I[u]$ die Formel $\forall X(\text{Pr}[X] \rightarrow Q[X, u])$.

Lemma 1.

Ist F eine Formel der Gestalt $z_{11} \in U \rightarrow \dots \rightarrow z_{1m} \in U \rightarrow \text{Pr}[U] \rightarrow \bigvee_{j=1}^n z_{2j} \in U$ mit $m \geq 0$, $n \geq 1$ und $z_{1i} \neq z_{2j}$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ und gilt $\Gamma:\alpha: 0 \vdash F$, so ist $K_K \xi < [\alpha; k]$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $\xi = m \cdot n \{\varphi^{-1} z_{21}, \dots, \varphi^{-1} z_{2n}\}$ ist.

Beweis durch Induktion nach α .

F ist kein Axiom und kann nur durch einen $(S3, 0)$ -Schluss mit einer Prämisse $\Gamma:\beta:0 \vdash (Q[U, z_3] \rightarrow z_3 \in U) \rightarrow F$ hergeleitet sein, wobei $K_K \beta < [\alpha; k]$ gilt. Mit (IS1) folgt daraus:

1) $\Gamma; \beta:0 \vdash z_3 \in U \rightarrow F$ und

2) $\Gamma; \beta:0 \vdash \neg Q[U, z_3] \rightarrow F$.

Aus 2) folgt mit (IS2,0)*

3) $\Gamma; \beta:0 \vdash \neg (z < z_3 \rightarrow z \in U) \rightarrow F$

und daraus strukturell

4) $\Gamma; \beta:0 \vdash z < z_3 \rightarrow z_{11} \in U \rightarrow \dots \rightarrow z_{1m} \in U \rightarrow \text{Pr}[U] \rightarrow \bigvee_{j=1}^n z_{2j} \in U \vee z \in U$.

1. Fall: Es ist $z_3 \neq z_{2j}$ für $1 \leq j \leq n$. Aus 1) folgt dann nach I.V.

$K_k \xi < [\beta; k] < [\alpha; k]$.

2. Fall: Es ist $z_3 \in \{z_{21}, \dots, z_{2n}\}$. Dann ist $\xi \leq \varphi^{-1} z_3$. Zu zeigen ist $K_k \xi < [\alpha; k]$ für $k \in \mathbb{N}$. Ist $S\xi < k$, so ist dies trivial. Sei also $k \leq S\xi$ und $\rho \in K_k \xi$. Dann ist $\rho \leq \xi$. Ist $S\rho = N$ und $\rho < [\Omega_N; k]$, so sind wir fertig.

Sei also $[\Omega_N; k] \leq \rho$. Dann ist $S\rho = k$. ρ ist ein Hauptterm. Daher gibt es für $\eta < \rho$ unendlich viele Ziffern z mit $\eta < \varphi^{-1} z < \rho$. Unter ihnen gibt es ein z_0 , das von allen z_{1i} verschieden ist, mit $\eta < \varphi^{-1} z_0 < \rho \leq \xi \leq \varphi^{-1} z_3$. Also ist $z_0 < z_3$ eine wahre numerische Primformel und aus 4) folgt mit II. §5. Lemma 3 b)

5) $\Gamma; \beta:0 \vdash z_{11} \in U \rightarrow \dots \rightarrow z_{1m} \in U \rightarrow \text{Pr}[U] \rightarrow \bigvee_{j=1}^n z_{2j} \in U \vee z_0 \in U$.

Sei $\gamma = \varphi^{-1} z_0$. Nach I.V. gilt nun $K_1 \gamma < [\beta; 1]$ für $1 \in \mathbb{N}$ und damit ins-
[$\gamma; k$] < [$\beta; k$]. Nun ist $S\gamma \leq k$, also $[\gamma; k] = \gamma$ und wir haben $\eta < \gamma < [\beta; k]$. Also gilt für alle $\eta < \rho$ bereits $\eta < [\beta; k]$. Damit folgt aber $\rho \leq [\beta; k] < [\alpha; k]$ und alles ist bewiesen.

Lemma 2.

Zu $\alpha \in \Sigma$ und $\eta < \omega$ gibt es ein $\beta \in \Sigma$, so dass $\Gamma; \alpha: \eta \vdash I[z]$ nur für solche z gilt, für die $\varphi^{-1} z < [\beta; s(z)]$ ist.

Beweis.

Es gelte

1) $\Gamma; \alpha: \eta \vdash I[z]$.

Mit dem Satz von II. §5 folgt dann

2) $\Gamma: \gamma: 0 \vdash I[z]$ mit $\gamma \in \Sigma$.

Aus 2) folgt mit (IS2,1)

3) $\Gamma: \gamma: 0 \vdash \text{Pr}[U] \rightarrow Q[U, z]$

und daraus mit (IS2,0)* und Strukturschluss

4) $\Gamma: \gamma: 0 \vdash z_1 < z \rightarrow \text{Pr}[U] \rightarrow z_1 \in U$.

Für alle $z_1 < z$ folgt daraus nach II.§5.Lemma 3 b)

5) $\Gamma: \gamma: 0 \vdash \text{Pr}[U] \rightarrow z_1 \in U$.

Nach Lemma 1 ist dann $K_k \varphi^{-1} z_1 < [\gamma; k]$ für $k \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere $K_{s(z)} \varphi^{-1} z_1 < [\gamma; s(z)]$ für alle $z_1 < z$. Also folgt $\varphi^{-1} z \leq [\gamma; s(z)]$. Setzen wir $\beta = [\gamma; s(z)] * \Omega_{s(z)}$, so ist $\beta \in \Sigma$ und $\varphi^{-1} z < [\beta; s(z)]$.

Satz:

Die transfinite Induktion bis σ_0 ist in Π^* und damit auch in Π nicht herleitbar.

Der Beweis folgt sofort aus Lemma 2, da es in Σ keinen Ordinalterm gibt, der σ_0 bezeichnet.

§4. Beweisbarkeit der transfiniten Induktion bis zu jeder Ordinalzahl

$< \sigma_0$ in Π

1. Wir geben zunächst Definitionen einiger spezieller primitiv-rekursiver Funktionen und Prädikate an, die im folgenden häufig gebraucht werden und definieren spezielle Nennformen.

$$1.1 \quad g(z) := g\varphi^{-1}z$$

$$1.2 \quad (z_1, z_2) \in K_k \text{ gelte genau dann, wenn } \varphi^{-1}z_1 \in K_k \varphi^{-1}z_2 \text{ ist.}$$

$$1.3 \quad z_1 \oplus z_2 := \varphi(\varphi^{-1}z_1 * \varphi^{-1}z_2)$$

$$1.4 \quad \langle z_1, z_2 \rangle := \varphi(\varphi^{-1}z_1, \varphi^{-1}z_2)$$

$$1.5 \quad z \in \Sigma_N \text{ gelte genau dann, wenn } \varphi^{-1}z \in \Sigma'(N) \text{ ist}$$

$$1.6 \quad z \in H \text{ gelte genau dann, wenn } \varphi^{-1}z \text{ ein Hauptterm ist.}$$

$$1.7 \quad Q[U, V, u] \text{ sei die Formel } \forall x(x \in U \wedge x < u \rightarrow x \in V)$$

$$1.8 \quad \text{Pr}[U, V] \text{ sei die Formel } \forall x(Q[U, V, x] \rightarrow x \in V)$$

$$1.9 \quad I[U, u] \text{ sei die Formel } \forall X(\text{Pr}[U, X] \rightarrow Q[X, u])$$

$$1.10 \quad I^*[U, u] \text{ sei die Formel } I[U, u] \wedge u \in U.$$

2. Induktive Definition 1-stelliger Prädikate M_k^N

$$2.1 \quad M_0^N \text{ sei das primitiv-rekursive Prädikat } \Sigma_N.$$

$$2.2 \quad M_{k+1}^N \text{ sei } \lambda x(x \in M_k^N \wedge \forall y((y, x) \in K_k \rightarrow I^*[M_k^N, y])). \text{ Man zeigt leicht}$$

durch metalogische Induktion nach k , dass die M_k^N in Π definierbare

Prädikate sind. Im folgenden betrachten wir N als fest gewählt und

schreiben den oberen Index von M_k nur dann, wenn wir ihn besonders

betonen wollen.

Lemma 1.

Die folgenden Formeln sind in Π herleitbar.

$$(1) \quad 0 \in M_k$$

$$(2) \quad u \in M_{k+1} \rightarrow u \in M_k$$

$$(3) \quad u \oplus v \in M_k \leftrightarrow u \in M_k \wedge v \in M_k$$

$$(4) \quad k \leq s(v) \rightarrow (\langle u, v \rangle \in M_k \leftrightarrow u \in M_k \wedge v \in M_k)$$

$$(5) \quad k \leq i \leq N \rightarrow u \in M_k \rightarrow ((v, u) \in K_1 \rightarrow v \in M_k)$$

Diese Formeln beweist man leicht durch metalogische Induktion nach k .

Lemma 2.

$$Q[U, V, u] \wedge v \leq u \rightarrow Q[U, V, v]$$

Beweis.

- 1) $Q[U, V, u] \rightarrow a \in U \wedge a < u \rightarrow a \in V$ Prädikatenlogisch herleitbar
- 2) $v \leq u \rightarrow a < v \rightarrow a < u$ verifizierbar
- 3) $Q[U, V, u] \wedge v \leq u \rightarrow a \in U \wedge a < v \rightarrow a \in V$ auslg. aus 1) und 2)
- 4) $Q[U, V, u] \wedge v \leq u \rightarrow Q[U, V, v]$ aus 3) mit (S2,0)

Lemma 3.

$$J[U, u] \wedge v \leq u \rightarrow I[U, v]$$

Beweis.

- 1) $I[U, u] \rightarrow \text{Pr}[U, V] \rightarrow Q[U, V, u]$ prädikatenlogisch herleitbar
- 2) $Q[U, V, u] \wedge v \leq u \rightarrow Q[U, V, v]$ Lemma 2
- 3) $I[U, u] \wedge v \leq u \rightarrow \text{Pr}[U, V] \rightarrow Q[U, V, v]$ auslg. aus 1) und 2)
- 4) $I[U, u] \wedge v \leq u \rightarrow I[U, v]$ aus 3) mit (S2,1)

Lemma 4.

$\forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathfrak{P}[x \in V]) \vdash \mathfrak{P}[Q[U, V, a]]$ ist ein in Π zulässiger Schluss.

Beweis.

- 1) $\forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathfrak{P}[x \in V])$ Vor.
- 2) $u \in U \wedge u < a \rightarrow \mathfrak{P}[u \in V]$ aus 1) mit (S2,0)-Inversion
- 3) $\mathfrak{P}[u \in U \wedge u < a \rightarrow u \in V]$ strukturell aus 2)
- 4) $\mathfrak{P}[Q[U, V, a]]$ quantorenlog. aus 3)

Lemma 5.

- a) $\mathbb{P}[Q[U, V, a]] \vdash \forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathbb{P}[x \in V])$ und
 b) $\mathbb{P}[\neg a \in V] \vdash \forall x(a \in U \wedge a < x \rightarrow \mathbb{P}[\neg Q[U, V, x]])$ sind in Π zulässige Schlüsse.

Beweis.

a)

- 1) $\mathbb{P}[u \in U \wedge u < a \rightarrow u \in V]$ quantlg. aus der Vor.
 2) $u \in U \wedge u < a \rightarrow \mathbb{P}[u \in V]$ strukt. aus 1)
 3) $\forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathbb{P}[x \in V])$ quantlg. aus 2)

b)

- 1) $\mathbb{P}[\neg a \in V]$ Vor.
 2) $a \in U \wedge a < u \wedge a \in V \rightarrow \mathbb{P}[\neg Q[U, V, u]]$ struk. aus 1), u trete nicht in $\mathbb{P}$ auf
 3) $a \in U \wedge a < u \rightarrow (a \in U \wedge z < a) \vee \mathbb{P}[\neg Q[U, V, u]]$ herleitbare Formel
 4) $a \in U \wedge a < u \rightarrow (a \in U \wedge z < a \rightarrow a \in V) \rightarrow \mathbb{P}[\neg Q[U, V, u]]$ auslg. aus 2), 3)
 5) $\forall x(a \in U \wedge a < x \rightarrow \mathbb{P}[\neg Q[U, V, x]])$ quantlg. aus 4)

Lemma 6.

$$\forall x(x \leq a \wedge \text{Pr}[U, V] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow x \in V)$$

Beweis.

- 1) $Q[U, V, a] \wedge u \leq a \rightarrow Q[U, V, u]$ Lemma 4
 2) $u \leq a \wedge \text{Pr}[U, V] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow Q[U, V, u] \vee u \in V$ struk. aus 1)
 3) $u \in V \rightarrow u \in V$ Axiom
 4) $u \leq a \wedge \text{Pr}[U, V] \wedge Q[U, V, a] \wedge (Q[U, V, u] \rightarrow u \in V) \rightarrow u \in V$ auslg. aus 2), 3)
 5) $\forall x(x \leq a \wedge \text{Pr}[U, V] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow x \in V)$ quantlg. aus 4)

Korollar.

$$\text{Pr}[U, V] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow a \in V$$

Lemma 7.

$I^*[M_K, 0]$

Beweis.

- 1) $u \in M_K \wedge u < 0 \rightarrow u \in V$ verifizierbar
- 2) $Q[M_K, V, 0]$ quantlg. aus 1)
- 3) $Pr[M_K, V] \rightarrow Q[M_K, V, 0]$ str. aus 2)
- 4) $I[M_K, 0]$ quantlg. aus 3)
- 5) $0 \in M_K$ Lemma 1
- 6) $I^*[M_K, 0]$ auslg. aus 4), 5)

Lemma 8.

$\forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathfrak{P}[I[U, x]]) \vdash \mathfrak{P}[I[U, a]]$ ist ein in Π zulässiger Schluss.

Beweis.

- 1) $u \in U \wedge u < a \rightarrow \mathfrak{P}[I[U, u]]$ quantlog. aus Vor. u sei nicht in $\mathfrak{P}$
- 2) $u \in U \wedge u < a \rightarrow \mathfrak{P}[Pr[U, V] \rightarrow Q[U, V, u]]$ quantlog. aus 1). U trete dabei nicht in $\mathfrak{P}$ auf.
- 3) $Pr[U, V] \wedge Q[U, V, u] \rightarrow u \in V$ Korollar zu Lemma 6
- 4) $u \in U \wedge u < a \rightarrow \mathfrak{P}[Pr[U, V] \rightarrow u \in V]$ auslg. aus 2), 3)
- 5) $\forall x(x \in U \wedge x < a \rightarrow \mathfrak{P}[Pr[U, V] \rightarrow x \in V])$ aus 4) mit (S2, o)
- 6) $\mathfrak{P}[Pr[U, V] \rightarrow Q[U, V, a]]$ aus 5) mit Lemma 4
- 7) $\mathfrak{P}[I[U, a]]$ aus 6) mit (S2, 1)

Definitionen:

$\mathfrak{P}[U, V, a]$ sei die Formel $\forall x(Q[U, V, x] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow Q[U, V, x \oplus a])$

$\mathfrak{b}[U, V]$ sei der P-Term $\lambda y \mathfrak{P}[U, V, y]$

Lemma 9.

$Pr[M_K, V] \rightarrow Pr[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V]]$

Beweis.

- 1) $\forall x(x \leq u \wedge Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, V, u] \rightarrow x \in V)$ Lemma 6

- 2) $\Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, V, u_1 \oplus v] \rightarrow u_1 \oplus v \in V$ Korollar zu Lemma 6
- 3) $Q[M_K, V, u_1] \rightarrow Q[M_K, V, u_1]$ herleitbare Formel
- 4) $\Pr[M_K, V] \wedge \mathfrak{B}[M_K, V, v] \wedge (Q[M_K, V, u_1] \rightarrow Q[M_K, V, u_1 \oplus v]) \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow$
 $u_1 \oplus v \in V$ auslg. aus 2), 3)
- 5) $\Pr[M_K, V] \wedge v \in \mathfrak{b}[M_K, V] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow u_1 \oplus v \in V$ quantlog. und mit (S4)
aus 4)
- 6) $\forall x (v \in M_K \wedge v < x \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], x] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow u_1 \oplus v \in V)$
aus 5) mit Lemma 5 b)
- 7) $a \in M_K \wedge a = u_1 \oplus v \rightarrow v \in M_K$ aus Lemma 1 (3)
- 8) $a \in M_K \wedge a = u_1 \oplus v \wedge v < u_2 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow$
 $a \in V$ aus 6) und 7)
- 9) $u_2 \leq u_1 \wedge a < u_1 \oplus u_2 \rightarrow a \leq u_1 \vee (a = u_1 \oplus v \wedge v < u_2)$ verifizierbar
- 10) $u_2 \leq u_1 \wedge a < u_1 \oplus u_2 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \wedge Q[M_K, V, u_1] \wedge a \in M_K \rightarrow$
 $a \leq u_2 \vee a \in V$ auslg. aus 9), 10)
- 11) $a \leq u_2 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow a \in V$ aus 1)
- 12) $u_2 \leq u_1 \wedge a < u_1 \oplus u_2 \wedge a \in M_K \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow$
 $a \in V$ aus 10) und 11)
- 13) $u_2 \leq u_1 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \wedge Q[M_K, V, u_1] \rightarrow Q[M_K, V, u_1 \oplus u_2]$
aus 12) mit Lemma 4
- 14) $u_1 \leq u_2 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_1] \wedge Q[M_K, V, u_2] \rightarrow Q[M_K, V, u_1 \oplus u_2]$
analog zu 13)
- 15) $u_1 \leq u_2 \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \rightarrow Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_1]$ Lemma 2
- 16) $u_1 \leq u_2 \wedge \Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \rightarrow Q[M_K, V, u_2] \rightarrow Q[M_K, V, u_1 \oplus u_2]$
aus 14) und 15)
- 17) $\Pr[M_K, V] \wedge Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \rightarrow Q[M_K, V, u_1] \wedge Q[M_K, V, u_2] \rightarrow Q[M_K, V, u_1 \oplus u_2]$
aus 13) und 16)
- 18) $\Pr[M_K, V] \rightarrow Q[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V], u_2] \rightarrow u_2 \in \mathfrak{b}[M_K, V]$ aus 17) mit (S2, o) u. (S4)
- 19) $\Pr[M_K, V] \rightarrow \Pr[M_K, \mathfrak{b}[M_K, V]]$ aus 18) mit (S2, o)

Lemma 10.

$$I^*[M_K, u] \wedge I^*[M_K, v] \rightarrow I^*[M_K, u \oplus v]$$

Beweis.

- 1) $\text{Pr}[M_K, V] \rightarrow \text{Pr}[M_K, b[M_K, V]]$ Lemma 9
- 2) $\text{Pr}[M_K, b[M_K, V]] \wedge Q[M_K, b[M_K, V], v] \rightarrow v \in b[M_K, V]$ Korollar zu Lemma 6
- 3) $\text{Pr}[M_K, V] \wedge Q[M_K, b[M_K, V], v] \rightarrow v \in b[M_K, V]$ aus 1) u. 2)
- 4) $\text{Pr}[M_K, V] \wedge Q[M_K, b[M_K, V], v] \rightarrow \exists[M_K, V, v]$ aus 3)
- 5) $\text{Pr}[M_K, V] \wedge Q[M_K, b[M_K, V], v] \rightarrow Q[M_K, V, u] \rightarrow Q[M_K, V, u \oplus v]$ aus 4)
- 6) $Q[M_K, V, u] \wedge (\text{Pr}[M_K, b[M_K, V]] \rightarrow Q[M_K, b[M_K, V], v]) \wedge \text{Pr}[M_K, V] \rightarrow$
 $Q[M_K, V, u \oplus v]$ aus 1) u. 5)
- 7) $Q[M_K, V, u] \wedge I[M_K, v] \wedge \text{Pr}[M_K, V] \rightarrow Q[M_K, V, u \oplus v]$ aus 6)
- 8) $(\text{Pr}[M_K, V] \rightarrow Q[M_K, V, u]) \wedge I[M_K, v] \wedge \text{Pr}[M_K, V] \rightarrow Q[M_K, V, u \oplus v]$
 auslg. aus 7)
- 9) $I[M_K, u] \wedge I[M_K, v] \rightarrow I[M_K, u \oplus v]$ quantlg. aus 8)
- 10) $u \in M_K \wedge v \in M_K \rightarrow u \oplus v \in M_K$ Lemma 1 (3)
- 11) $I^*[M_K, u] \wedge I^*[M_K, v] \rightarrow I^*[M_K, u \oplus v]$ auslg. aus 9), 10)

Lemma 11.

$$I^*[M_K, u] \wedge I^*[M_K, v] \leftrightarrow I^*[M_K, u \oplus v]$$

Beweis.

Die Richtung von links nach rechts ist Lemma 10. Die Gegenrichtung ergibt sich wie folgt:

$I^*[M_K, u \oplus v] \wedge u \leq u \oplus v \wedge v \leq u \oplus v \rightarrow I^*[M_K, u] \wedge I^*[M_K, v]$ ergibt sich aus Lemma 3 und Lemma 1 (3). Da $u \leq u \oplus v \wedge v \leq u \oplus v$ eine verifizierbare Formel ist, folgt daraus die Behauptung.

Definition:

Wir definieren ein 2-stelliges primitiv-rekursives Prädikat $\mathfrak{A}$ durch:
 $(z_1, z_2) \in \mathfrak{A}$ gelte genau dann, wenn $\varphi^{-1} z_1$ eine Komponente von $\varphi^{-1} z_2$ ist,
 und zwei einstellige primitiv-rekursive Funktionen h und f wie folgt:

$h(z)$ sei der φ -Wert der grössten Komponente von $\varphi^{-1}z$; dann ist $h(z) \leq z$ und es gibt daher ein in primitiv-rekursiver Weise berechenbares $f(z)$ mit $z = h(z) \oplus f(z)$.

$\Omega[a]$ sei die Formel $\forall y \forall z (g(y) = z \wedge z < g(a) \wedge \forall x ((x, y) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow I^*[M_K, y])$

Lemma 12.

$\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \wedge \Omega[a] \rightarrow I^*[M_K, a]$

Beweis.

- 1) $a \in H \rightarrow (a, a) \in \mathcal{U}$ verifizierbar
- 2) $\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow (a, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, a]$ herleitbare Formel
- 3) $a \in H \rightarrow \forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow \Omega[a] \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus 1), 2)
- 4) $\neg a \in H \rightarrow a = h(a) \oplus f(a) \wedge g(h(a)) < g(a) \wedge g(f(a)) < g(a)$ verifizierbar
- 5) $(h(a), a) \in \mathcal{U}$ verifizierbar
- 6) $\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow (h(a), a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, h(a)]$ herleitbar
- 7) $\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow I^*[M_K, h(a)]$
- 8) $(u, f(a)) \in \mathcal{U} \rightarrow (u, a) \in \mathcal{U}$ verifizierbar
- 9) $\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow (u, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, u]$ herleitbare Formel
- 10) $\text{---}''\text{---} \rightarrow (u, f(a)) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus 8), 9)
- 11) $\text{---}''\text{---} \rightarrow \forall x ((x, f(a)) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x])$ aus 10)
- 12) $\Omega[a] \rightarrow g(f(a)) = g(f(a)) \wedge g(f(a)) < g(a) \wedge \forall x ((x, f(a)) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \rightarrow I^*[M_K, f(a)]$ herleitbare Formel
- 13) $\neg a \in H \rightarrow \forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \wedge \Omega[a] \rightarrow I^*[M_K, f(a)]$ aus 4), 11) und 12)
- 14) $\text{---}''\text{---} \rightarrow I^*[M_K, h(a)] \wedge I^*[M_K, f(a)]$ aus 7) und 13)
- 15) $I^*[M_K, h(a)] \wedge I^*[M_K, f(a)] \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus Lemma 10 mit der Def. von h und f
- 16) $\neg a \in H \rightarrow \forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \wedge \Omega[a] \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus 14) u. 15)
- 17) $\forall x ((x, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_K, x]) \wedge \Omega[a] \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus 3) u. 16)

Lemma 13.

$$\forall y((y, v) \in \mathfrak{A} \rightarrow I^*[M_K, y]) \leftrightarrow I^*[M_K, v]$$

Beweis.

Mit $\mathfrak{B}[v]$ kürzen wir die Formel $\forall y((y, v) \in \mathfrak{A} \rightarrow I^*[M_K, y])$ und mit $\mathfrak{G}[v]$ die Formel $\mathfrak{B}[v] \rightarrow I^*[M_K, v]$ ab.

- 1) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow \mathfrak{G}[x])) \rightarrow a_2 < a_1 \rightarrow g(u) = a_2 \rightarrow \mathfrak{B}[u] \rightarrow I^*[M_K, u]$
- 2) $g(u) = a_2 \wedge g(v) = a_1 \wedge a_2 < g(v) \rightarrow a_2 < a_1$ verifizierbar
- 3) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow \mathfrak{G}[x])) \rightarrow g(u) = a_2 \wedge g(v) = a_1 \wedge a_2 < g(v) \rightarrow$
 $\mathfrak{B}[u] \rightarrow I^*[M_K, u] \quad \text{aus 1) u. 2)}$
- 4) - - - " - - - $\rightarrow g(v) = a_1 \rightarrow \mathfrak{R}[v] \quad \text{quantlg. aus 3)}$
- 5) - - - " - - - $\rightarrow g(v) = a_1 \wedge \mathfrak{B}[v] \rightarrow \mathfrak{B}[v] \wedge \mathfrak{R}[v]$
- 6) $\mathfrak{B}[v] \wedge \mathfrak{R}[v] \rightarrow I^*[M_K, v] \quad \text{Lemma 12}$
- 7) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow \mathfrak{G}[x])) \rightarrow g(v) = a_1 \rightarrow \mathfrak{B}[v] \rightarrow I^*[M_K, v]$
- 8) - - - " - - - $\rightarrow \forall x(g(x) = a_1 \rightarrow \mathfrak{G}[x])$
- 9) $\forall x(g(x) = g(v) \rightarrow \mathfrak{G}[x]) \quad \text{aus 8) mit (VI)'$
- 10) $g(v) = g(v) \rightarrow \mathfrak{G}[v]$
- 11) $\mathfrak{G}[v]$

Damit ist die Richtung von links nach rechts des Lemmas gezeigt.

Zum Beweis der Gegenrichtung definieren wir eine 2-stellige primitiv-rekursive Funktion $\dot{+}$ durch $z_1 \dot{+} z_2 := \varphi(-\varphi^{-1} z_1 \# \varphi^{-1} z_2)$ falls $z_1 \leq z_2$ ist und 0 sonst. Dann ist die folgende Formel verifizierbar.

- 12) $(a, v) \in \mathfrak{A} \rightarrow v = a \oplus (v \dot{+} a)$
- 13) $I^*[M_K, v] \wedge v = a \oplus (v \dot{+} a) \rightarrow I^*[M_K, a] \quad \text{Lemma 11}$

Aus 12) und 13) ergibt sich dann sofort

- 14) $I^*[M_K, v] \rightarrow \forall y((y, a) \in \mathfrak{A} \rightarrow I^*[M_K, y])$

Aus 11) und 14) folgt dann die Behauptung.

Lemma 14.

$\mathfrak{P}[Q[M_k, V, v]] \mid \mathfrak{P}[Q[M_{k+1}, V, v]]$ ist ein zulässiger Schluss.

Beweis.

- 1) $\mathfrak{P}[Q[M_k, V, v]]$ Vor.
- 2) $\mathfrak{P}[u \in M_k \wedge u < v \rightarrow u \in V]$ aus 1)
- 3) $u \in M_{k+1} \wedge u < v \rightarrow u \in M_k \wedge u < v$ aus Lemma 1 (2)
- 4) $\mathfrak{P}[u \in M_{k+1} \wedge u < v \rightarrow u \in V]$ aus 2) u. 3)
- 5) $\mathfrak{P}[Q[M_{k+1}, V, v]]$

Lemma 15.

$\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_{k+1}, V]] \mid \mathfrak{P}[\text{Pr}[M_k, V]]$ ist ein zulässiger Schluss.

Beweis.

- 1) $\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_{k+1}, V]]$ Vor.
- 2) $\mathfrak{P}[Q[M_{k+1}, V, u] \rightarrow u \in V]$ aus 1)
- 3) $Q[M_k, V, u] \rightarrow Q[M_{k+1}, V, u]$ mit Hilfe von Lemma 14 herleitbar
- 4) $\mathfrak{P}[Q[M_k, V, u] \rightarrow u \in V]$ aus 2) u. 3)
- 5) $\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_k, V]]$

Lemma 16.

$\mathfrak{P}[I[M_k, v]] \mid \mathfrak{P}[I[M_{k+1}, v]]$ ist ein zulässiger Schluss.

Beweis.

- 1) $\mathfrak{P}[I[M_k, v]]$ Vor.
- 2) $\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_k, V] \rightarrow Q[M_k, V, v]]$
- 3) $\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_k, V] \rightarrow Q[M_{k+1}, V, v]]$ aus 2) mit Lemma 14
- 4) $\text{Pr}[M_{k+1}, V] \rightarrow \text{Pr}[M_k, V]$ mit Hilfe von Lemma 15 herleitbar
- 5) $\mathfrak{P}[\text{Pr}[M_{k+1}, V] \rightarrow Q[M_{k+1}, V, v]]$ aus 3) u. 4)
- 6) $\mathfrak{P}[I[M_{k+1}, v]]$

Lemma 17.

$s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \rightarrow I^*[M_{k+1}, u]$

Beweis.

- 1) $I^*[M_k, u] \wedge (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_k, a]$ Folgerung aus Lemma 13
- 2) $I^*[M_k, u] \wedge (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow I[M_{k+1}, a]$ aus 1) mit Lemma 16
- 3) $s(u) \leq k \wedge (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow s(a) \leq k$ verifizierbar
- 4) $(a, u) \in \mathcal{U} \wedge s(a) \leq k \wedge (v, a) \in K_k \rightarrow v = a$ verifizierbar
- 5) $s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \wedge (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow (v, a) \in K_k \rightarrow I^*[M_k, v]$ aus 1), 3) u. 4)
- 6) $s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \wedge (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow a \in M_k \wedge \forall x ((x, a) \in K_k \rightarrow I^*[M_k, x])$
- 7) $s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \rightarrow (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow a \in M_{k+1}$ aus 6) mit (S4)
- 8) $s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \rightarrow (a, u) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_{k+1}, a]$ aus 2) u. 7)
- 9) $s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u] \rightarrow I^*[M_{k+1}, u]$ aus 8) und Lemma 13

Korollar.

$\mathfrak{P}[s(u) \leq k \wedge I^*[M_k, u]] \vdash \mathfrak{P}[I^*[M_j, u]]$ ist für alle $j \geq k$ ein zulässiger Schluss.

Lemma 18.

$a \in M_k \wedge s(a) < k \rightarrow I^*[M_k, a]$

Beweis.

Für $k=0$ folgt die Formel sofort aus der verifizierbaren Formel $\neg s(a) < 0$. Sei also $k=j+1$.

- 1) $s(a) \leq j \wedge (u, a) \in \mathcal{U} \rightarrow (u, a) \in K_j \wedge s(u) \leq j$ verifizierbar
- 2) $a \in M_{j+1} \rightarrow \forall x ((x, a) \in K_j \rightarrow I^*[M_j, x])$ herleitbare Formel
- 3) $a \in M_{j+1} \wedge (u, a) \in K_j \rightarrow I^*[M_j, u]$
- 4) $a \in M_{j+1} \wedge s(a) \leq j \wedge (u, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_j, u] \wedge s(u) \leq j$ aus 1) u. 3)
- 5) $a \in M_{j+1} \wedge s(a) \leq j \rightarrow (u, a) \in \mathcal{U} \rightarrow I^*[M_{j+1}, u]$ aus 4) und Lemma 17
- 6) $a \in M_{j+1} \wedge s(a) \leq j \rightarrow I^*[M_{j+1}, a]$ aus 5) und Lemma 13

Lemma 19.

Für $0 \leq i \leq k \leq \mathbb{N}$ gilt $\varphi_{\Omega_k} \in \mathcal{M}_1^{\mathbb{N}}$.

Beweis durch metalogische $I^{\mathbb{N}}$ duktion nach 1.

Für $i = 0$ ist $\varphi\Omega_k \in M_0$ verifizierbar.

Sei $i = j+1$.

1) $\varphi\Omega_k \in M_j$ Induktionsvoraussetzung

Für $i \leq k$ ist die Formel

2) $\neg(a, \varphi\Omega_k) \in K_j$ verifizierbar.

3) $(a, \varphi\Omega_k) \in K_j \rightarrow I^*[M_j, a]$ aus 2)

4) $\forall x((x, \varphi\Omega_k) \in K_j \rightarrow I^*[M_j, x])$

5) $\varphi\Omega_k \in M_{j+1}$ aus 1) und 4) mit (S4)

Lemma 20.

$I^*[M_k, \varphi\Omega_k]$

Beweis.

- | | |
|---|---------------------|
| 1) $a \in M_k \wedge a < \varphi\Omega_k \rightarrow s(a) < k$ | verifizierbar |
| 2) $a \in M_k \wedge s(a) < k \rightarrow I^*[M_k, a]$ | Lemma 18 |
| 3) $a \in M_k \wedge a < \varphi\Omega_k \rightarrow I^*[M_k, a]$ | aus 1) und 2) |
| 4) $I[M_k, \varphi\Omega_k]$ | aus 3) mit Lemma 8 |
| 5) $I^*[M_k, \varphi\Omega_k]$ | aus 4) und Lemma 19 |

Lemma 21.

$a \in M_k \wedge a \leq \varphi\Omega_k \rightarrow I^*[M_k, a]$

Beweis.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $a \in M_k \wedge a < \varphi\Omega_k \rightarrow I^*[M_k, a]$ | Formel 3) des Beweises von Lemma 20 |
| 2) $a \in M_k \wedge a = \varphi\Omega_k \rightarrow I^*[M_k, a]$ | Lemma 20 |

Sie Behauptung folgt jetzt aussagenlogisch aus 1) und 2).

Lemma 22.

$\forall x(x \in M_{N+1}^N \rightarrow I^*[M_{N+1}^N, x])$

Beweis.

- | | |
|--|---------------------|
| 1) $a \in M_{N+1}^N \rightarrow s(a) < N+1$ | verifizierbar |
| 2) $a \in M_{N+1}^N \rightarrow I^*[M_{N+1}^N, a]$ | aus 1) und Lemma 18 |

Für das Folgende führen wir einige Abkürzungen ein:

$\mathfrak{A}[u]$ für $\forall x(x \in M_{k+1} \wedge x < u \rightarrow \forall y(s(y) = k \wedge I^*[M_k, y] \rightarrow I^*[M_k, \langle x, y \rangle]))$

$\mathfrak{B}[u, v]$ für $\forall x(x \in M_k \wedge s(x) = k \wedge x < v \rightarrow I^*[M_k, \langle u, x \rangle])$

$\mathfrak{C}[u, v_1, v_2]$ für $u \in M_k \wedge u < \langle v_1, v_2 \rangle \rightarrow I^*[M_k, u]$

$\mathfrak{G}[u, v_1, v_2]$ für $\forall x \forall y(g(x) = y \wedge y < g(u) \rightarrow \mathfrak{C}[x, v_1, v_2])$

Lemma 23.

$v_1 \in M_{k+1} \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathfrak{A}[v_1] \wedge \mathfrak{B}[v_1, v_2] \wedge \mathfrak{G}[u, v_1, v_2] \rightarrow$
 $\mathfrak{C}[u, v_1, v_2]$

Beweis.

Wir wollen im Beweis die behauptete Formel durch $\mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ abkürzen.

I. F_1 sei die Formel $\neg u < \langle v_1, v_2 \rangle$. Dann ist die Formel

1) $F_1 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ ein Axiom

II. F_2 sei die Formel $u = 0$. Dann gilt

1) $F_2 \rightarrow I^*[M_k, u]$ nach Lemma 7.

2) $F_2 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ Abschwächung von 1)

III. F_3 sei die Formel $u \leq \mathfrak{Q}_k$.

1) $F_3 \wedge u \in M_k \rightarrow I^*[M_k, u]$ Lemma 21

2) $F_3 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$

IV. F_4 sei die Formel $s(u) = k \wedge u = \langle v_1, v_4 \rangle \wedge u < \langle v_1, v_2 \rangle$

1) $F_4 \rightarrow v_4 < v_2 \wedge s(v_4) = k$ verifizierbar

2) $\mathfrak{B}[v_1, v_2] \wedge v_4 \in M_k \wedge s(v_4) = k \wedge v_4 < v_2 \rightarrow I^*[M_k, \langle v_1, v_4 \rangle]$ herleitbar

3) $F_4 \rightarrow u \in M_k \rightarrow v_4 < v_2 \wedge s(v_4) = k \wedge v_4 \in M_k$ aus 1) und Lemma 1 (4)

4) $F_4 \rightarrow u \in M_k \wedge \mathfrak{B}[v_1, v_2] \rightarrow I^*[M_k, u]$ aus 2) und 3)

5) $F_4 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ strukturell aus 4)

V. F_5 sei die Formel $s(u) = k \wedge u = \langle v_3, v_4 \rangle \wedge v_3 < v_1 \wedge u < \langle v_1, v_2 \rangle$

1) $F_5 \rightarrow u \in M_k \wedge (a, v_3) \in K_k \rightarrow v_3 \in M_k \wedge a \in M_k \wedge g(a) < g(u) \wedge a < \langle v_1, v_2 \rangle$
 Dies folgt aus Lemma 1 (4) und verifizierbaren Formeln.

2) $\mathfrak{A}[v_1] \wedge v_3 \in M_{k+1} \wedge v_3 < v_1 \rightarrow \forall y(s(y) = k \wedge I^*[M_k, y] \rightarrow I^*[M_k, \langle v_3, y \rangle])$
 herleitbare Formel

3) $\mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow g(a) = g(a) \wedge g(a) < g(u) \rightarrow \mathcal{G}[a, v_1, v_2]$ herleitb. Formel

4) $\mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow a \in M_K \wedge g(a) < g(u) \wedge a < \langle v_1, v_2 \rangle \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus 3)

5) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow ((a, v_3) \in K_K \rightarrow I^*[M_K, a]) \wedge v_3 \in M_K$ aus 1), 4)

6) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow v_3 \in M_{K+1}$ aus 5)

7) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow y(s(y) = k \wedge I^*[M_K, y] \rightarrow I^*[M_K, \langle v_3, y \rangle])$
aus 2) u. 6)

8) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \wedge s(v_4) = k \wedge I^*[M_K, v_4] \rightarrow I^*[M_K, u]$
aus 7)

9) $\mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \wedge v_4 \in M_K \wedge g(v_4) = g(v_4) \wedge g(v_4) < g(u) \rightarrow \mathcal{G}[v_4, v_1, v_2]$
herleitb. Formel

10) $F_5 \wedge u \in M_K \rightarrow v_4 \in M_K \wedge s(v_4) = k \wedge g(v_4) < g(u) \wedge v_4 < \langle v_1, v_2 \rangle$
Dies folgt aus Lemma 1 (4) und verifizierbaren Formeln

11) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow I^*[M_K, v_4] \wedge s(v_4) = k$ aus 9) u. 10)

12) $F_5 \wedge u \in M_K \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge \mathcal{G}*[u, v_1, v_2] \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus 8) u. 11)

13) $F_5 \rightarrow \mathcal{F}[u, v_1, v_2]$ strukturell aus 12)

VI. F_6 sei die Formel $s(u) = k \wedge u = \langle v_3, v_4 \rangle \wedge v_1 < v_3 \wedge u < \langle v_1, v_2 \rangle$.

1) $F_6 \rightarrow \exists x((x, v_1) \in K_K \wedge u \leq x) \vee u \leq v_2$ Dies folgt aus einer verifizierbaren Formel mit (S3, 0)

2) $I^*[M_K, v_2] \wedge u \leq v_2 \wedge u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus Lemma 3)

3) $v_1 \in M_{K+1} \rightarrow \forall x((x, v_1) \in K_K \rightarrow I^*[M_K, x])$ herleitbare Formel

4) $v_1 \in M_{K+1} \rightarrow (a, v_1) \in K_K \rightarrow I^*[M_K, a]$ aus 3)

5) $I^*[M_K, a] \wedge u \leq a \wedge u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus Lemma 3

6) $v_1 \in M_{K+1} \wedge (a, u) \in K_K \wedge u \leq a \wedge u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus 4) u. 5)

7) $v_1 \in M_{K+1} \wedge \exists x((x, v_1) \in K_K \wedge u \leq x) \wedge u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus 6)

8) $v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge u \in M_K \wedge (\exists x((x, v_1) \in K_K \wedge u \leq x) \vee u \leq v_2) \rightarrow$
 $I^*[M_K, u]$ aus 2) und 7)

9) $F_6 \wedge v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u]$ aus 1) und 8)

10) $F_6 \rightarrow \mathcal{F}[u, v_1, v_2]$ strukturell aus 9)

VII. F_7 sei die Formel $s(u) = k \wedge u = v_3 \oplus v_4 \wedge u < \langle v_1, v_2 \rangle \wedge \neg v_3 = 0 \wedge \neg v_4 = 0$.

- 1) $F_7 \wedge u \in M_K \rightarrow v_3 \in M_K \wedge v_4 \in M_K \wedge g(v_3) < g(u) \wedge g(v_4) < g(u) \wedge v_3 < v_1, v_2 \wedge v_4 < v_1, v_2 \wedge$
 $v_4 < v_1, v_2 \wedge$ Aus Lemma 1 (3) und verifizierb. Formeln
- 2) $G*[u, v_1, v_2] \rightarrow g(v_3) = g(v_3) \wedge g(v_3) < g(u) \rightarrow G[v_3, v_1, v_2]$ herlb. Formel
- 3) $F_7 \wedge u \in M_K \wedge G*[u, v_1, v_2] \rightarrow I*[M_K, v_3]$ aus 1) und 2)

Analog erhalten wir auch

- 4) $F_7 \wedge u \in M_K \wedge G*[u, v_1, v_2] \rightarrow I*[M_K, v_4]$
- 5) $F_7 \wedge u \in M_K \wedge G*[u, v_1, v_2] \rightarrow I*[M_K, u]$ aus 3) und 4) mit Lemma 10
- 6) $F_7 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$

VIII.

- 1) $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5 \wedge F_6 \wedge F_7 \rightarrow \mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ aus I - VII
- 2) $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5 \wedge F_6 \wedge F_7$ verifizierbar
- 3) $\mathfrak{U}[u, v_1, v_2]$ aus 1) und 2)

Lemma 24.

$$v_1 \in M_{k+1} \wedge I*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathfrak{U}[v_1] \wedge \mathfrak{E}[v_1, v_2] \rightarrow G[u, v_1, v_2]$$

Beweis.

Wir kürzen die behauptete Formel durch $G[u, v_1, v_2]$ ab. Es handelt sich offenbar um eine einfache Formel.

- 1) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow G[x, v_1, v_2])) \rightarrow a_2 < a_1 \wedge g(u) = a_2 \rightarrow G[u, v_1, v_2]$
herleitbare Formel
- 2) $g(u) = a_2 \wedge g(v) = a_1 \wedge a_2 < g(v) \rightarrow a_2 < a_1$ verifizierbar
- 3) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow G[x, v_1, v_2])) \rightarrow g(u) = a_2 \wedge g(v) = a_1 \wedge a_2 < g(v) \wedge$
 $v_1 \in M_{k+1} \wedge I*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathfrak{U}[v_1] \wedge \mathfrak{E}[v_1, v_2] \rightarrow G[u, v_1, v_2]$ aus 1), 2)
- 4) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow G[x, v_1, v_2])) \rightarrow g(v) = a_1 \wedge \forall v_1 \in M_K \wedge I*[M_K, v_2] \wedge$
 $s(v_2) = k \wedge \mathfrak{U}[v_1] \wedge \mathfrak{E}[v_1, v_2] \rightarrow G*[v, v_1, v_2]$ aus 3) durch Quantifizieren
über u und a_2
- 5) $\forall y(y < a_1 \rightarrow \forall x(g(x) = y \rightarrow G[x, v_1, v_2])) \rightarrow g(v) = a_1 \rightarrow G[v, v_1, v_2]$
aus 4) u. Lemma 23

$$6) \quad \forall x (g(x) = g(u) \rightarrow \mathbb{G}[x, v_1, v_2])) \quad \text{aus 5) mit (VI)'}$$

$$7) \quad \mathbb{G}[u, v_1, v_2]$$

Es sei $\mathbb{b}[u]$ der P-Term $\lambda y (s(y) = k \wedge I^*[M_K, y] \rightarrow I^*[M_K, \langle u, y \rangle])$

Lemma 25.

$$Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \wedge I^*[M_K, v_2] \rightarrow \mathbb{B}[v_1, v_2]$$

Beweis.

$$1) \quad u \in \mathbb{b}[v_1] \wedge s(u) = k \wedge I^*[M_K, u] \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, u \rangle] \quad \text{herleitb. Formel}$$

$$2) \quad u \in M_K \wedge u < v_2 \wedge Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \wedge I^*[M_K, u] \wedge s(u) = k \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, u \rangle] \\ \text{aus 1) mit Lemma 5 b)}$$

$$3) \quad u \in M_K \wedge u < v_2 \wedge I^*[M_K, v_2] \rightarrow I^*[M_K, u] \quad \text{aus Lemma 3}$$

$$4) \quad Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \wedge I^*[M_K, v_2] \rightarrow u \in M_K \wedge u < v_2 \wedge s(u) = k \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, u \rangle] \\ \text{aus 2) und 3)}$$

$$5) \quad Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \wedge I^*[M_K, v_2] \rightarrow \mathbb{B}[v_1, v_2] \quad \text{aus 4)}$$

Lemma 26.

$$v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathbb{U}[v_1] \rightarrow \mathbb{G}[u, v_1, v_2]$$

Beweis.

$$1) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathbb{U}[v_1] \wedge \mathbb{B}[v_1, v_2] \rightarrow \mathbb{G}[u, v_1, v_2] \quad \text{L.24}$$

$$2) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathbb{U}[v_1] \wedge \mathbb{B}[v_1, v_2] \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, v_2 \rangle] \\ \text{aus 1) mit Lemma 8}$$

$$3) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge v_2 \in M_K \wedge s(v_2) = k \rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \in M_K \quad \text{Lemma 1 (4)}$$

$$4) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge \mathbb{U}[v_1] \wedge \mathbb{B}[v_1, v_2] \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, v_2 \rangle] \\ \text{aus 2) und 3)}$$

$$5) \quad Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \wedge I^*[M_K, v_2] \rightarrow \mathbb{B}[v_1, v_2] \quad \text{Lemma 25}$$

$$6) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge \mathbb{U}[v_1] \wedge Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \rightarrow I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \rightarrow I^*[M_K, \langle v_1, v_2 \rangle] \\ \text{aus 4) und 5)}$$

$$7) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge \mathbb{U}[v_1] \wedge Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \rightarrow v_2 \in \mathbb{b}[v_1] \quad \text{aus 6)}$$

$$8) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge \mathbb{U}[v_1] \rightarrow \text{Pr}[M_K, \mathbb{b}[v_1]] \quad \text{aus 7)}$$

$$9) \quad v_1 \in M_{K+1} \wedge \mathbb{U}[v_1] \rightarrow (\text{Pr}[M_K, \mathbb{b}[v_1]] \rightarrow Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2]) \rightarrow Q[M_K, \mathbb{b}[v_1], v_2] \\ \text{aus 8)}$$

10) $v_1 \in M_{k+1} \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \rightarrow Q[M_k, \mathcal{V}[v_1], v_2]$ aus 9) mit (S3,1)

11) $v_1 \in M_{k+1} \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \rightarrow \mathcal{B}[v_1, v_2]$ aus 10) und 5)

12) $v_1 \in M_{k+1} \wedge \mathcal{U}[v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \rightarrow \mathcal{C}[u, v_1, v_2]$ aus 11) und 1)

Es sei T der P-Term $\lambda x(x \in M_{k+1} \rightarrow \forall y(s(y) = k \wedge I^*[M_k, y] \rightarrow I^*[M_k, \langle x, y \rangle]))$

Lemma 27.

$\text{Pr}[M_{k+1}, T]$

Beweis.

1) $Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow a \in M_{k+1} \wedge a < u \rightarrow a \in T$ herleitb. Formel

2) $Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow a \in M_{k+1} \wedge a < u \rightarrow \forall y(s(y) = k \wedge I^*[M_k, y] \rightarrow I^*[M_k, \langle a, y \rangle])$

3) $Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow \mathcal{U}[u]$ aus 2)

4) $u \in M_{k+1} \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow \mathcal{C}[v, u, v_2]$ aus 3) und Lemma 26

5) $u \in M_{k+1} \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \wedge Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow I^*[M_k, \langle u, v_2 \rangle]$

Dies erhält man ähnlich wie 4) im Beweis von Lemma 26

6) $Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow u \in M_{k+1} \rightarrow \forall y(I^*[M_k, y] \wedge s(y) = k \rightarrow I^*[M_k, \langle u, y \rangle])$ aus 5)

7) $Q[M_{k+1}, T, u] \rightarrow u \in T$ aus 6)

8) $\text{Pr}[M_{k+1}, T]$

Lemma 28.

$I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \rightarrow I^*[M_k, \langle v_1, v_2 \rangle]$

Beweis.

1) $I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge \text{Pr}[M_{k+1}, T] \rightarrow Q[M_{k+1}, T, v_1]$ herleitb. Formel

2) $I^*[M_{k+1}, v_1] \rightarrow Q[M_{k+1}, T, v_1]$ aus 1) und Lemma 27

3) $I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge a \in M_{k+1} \wedge a < v_1 \rightarrow a \in T$ aus 2)

4) $I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge a \in M_{k+1} \wedge a < v_1 \rightarrow \forall x(I^*[M_k, x] \wedge s(x) = k \wedge I^*[M_k, \langle a, x \rangle])$

5) $I^*[M_{k+1}, v_1] \rightarrow \mathcal{U}[v_1]$ aus 4)

6) $I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \rightarrow \mathcal{C}[u, v_1, v_2]$ aus 5) und Lemma 26

7) $I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge I^*[M_k, v_2] \wedge s(v_2) = k \rightarrow I^*[M_k, \langle v_1, v_2 \rangle]$ aus 5) ähnlich wie 4) in L.26

Mit I_K^N kürzen wir die Formel $\forall x(x \in M_K^N \rightarrow I^*[M_K^N, x])$ ab. $\mathfrak{M}[u]$ sei die Formel $\forall x \forall y (g(x) = y \wedge y < g(u) \wedge x \in M_K \wedge s(x) \leq k \rightarrow I^*[M_K, x])$.

Lemma 29.

$$I_{k+1} \wedge u \in M_K \wedge s(u) \leq k \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow I^*[M_K, u]$$

Beweis.

Wir kürzen die behauptete Formel durch $\mathfrak{U}[u]$ ab.

I. F_1 sei die Formel $u = 0$

$$1) \quad I^*[M_K, 0] \quad \text{Lemma 7}$$

$$2) \quad F_1 \rightarrow \mathfrak{U}[u] \quad \text{aus 1)}$$

II. F_2 sei die Formel $u \leq \varphi_K^\Omega$

$$1) \quad F_2 \rightarrow u \in M_K \rightarrow I^*[M_K, u] \quad \text{Lemma 20}$$

$$2) \quad F_2 \rightarrow \mathfrak{U}[u] \quad \text{aus 1)}$$

III. F_3 sei die Formel $u = \langle v_1, v_2 \rangle \wedge s(v_2) = k$

$$1) \quad F_3 \rightarrow g(v_1) < g(u) \wedge g(v_2) < g(u) \quad \text{verifizierbar}$$

$$2) \quad F_3 \wedge u \in M_K \rightarrow v_1 \in M_K \wedge v_2 \in M_K \quad \text{Lemma 1 (4)}$$

$$3) \quad F_3 \wedge v_1 \in M_K \wedge (a, v_1) \in K_K \rightarrow g(a) < g(u) \wedge s(a) \leq k \wedge a \in M_K \quad \text{aus Lemma 1 (5) und verifizierbaren Formeln}$$

$$4) \quad F_3 \wedge u \in M_K \wedge (a, v_1) \in K_K \rightarrow g(a) < g(u) \wedge s(a) \leq k \wedge a \in M_K \quad \text{aus 2) u. 3)}$$

$$5) \quad \mathfrak{M}[u] \wedge g(a) = g(a) \wedge g(a) < g(u) \wedge s(a) \leq k \rightarrow I^*[M_K, a] \quad \text{herleitb. Formel}$$

$$6) \quad F_3 \wedge u \in M_K \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow ((a, v_1) \in K_K \rightarrow I^*[M_K, a]) \wedge v_1 \in M_K \quad \text{aus 2), 4) u. 5)}$$

$$7) \quad F_3 \wedge u \in M_K \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow v_1 \in M_{k+1} \quad \text{aus 6)}$$

$$8) \quad I_{k+1} \wedge v_1 \in M_{k+1} \rightarrow I^*[M_{k+1}, v_1] \quad \text{herleitbare Formel}$$

$$9) \quad F_3 \wedge I_{k+1} \wedge u \in M_K \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow I^*[M_{k+1}, v_1] \quad \text{aus 7) und 8)}$$

$$10) \quad \mathfrak{M}[u] \wedge g(v_2) = g(v_2) \wedge g(v_2) < g(u) \wedge v_2 \in M_K \wedge s(v_2) \leq k \rightarrow I^*[M_K, v_2] \quad \text{herleitbare Formel}$$

$$11) \quad F_3 \wedge u \in M_K \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \quad \text{aus 1), 2) und 10)}$$

$$12) \quad F_3 \wedge I_{k+1} \wedge u \in M_K \wedge \mathfrak{M}[u] \rightarrow I^*[M_{k+1}, v_1] \wedge I^*[M_K, v_2] \wedge s(v_2) = k \quad \text{aus 9) und 11)}$$

$$13) \quad F_3 \rightarrow \mathfrak{U}[u] \quad \text{aus 12) und Lemma 28}$$

IV. F_4 sei die Formel $u = v_1 \oplus v_2 \wedge \neg v_1 = 0 \wedge \neg v_2 = 0 \wedge s(u) = k$

1) $F_4 \rightarrow g(v_1) < g(u) \wedge g(v_2) < g(u) \wedge s(v_1) \leq k \wedge s(v_2) \leq k$ verifizierbar

2) $F_4 \wedge u \in M_k \rightarrow v_1 \in M_k \wedge v_2 \in M_k$ Lemma 1 (3)

3) $\mathbb{M}[u] \wedge g(v_1) = g(v_1) \wedge g(v_1) < g(u) \wedge v_1 \in M_k \wedge s(v_1) \leq k \rightarrow I^*[M_k, v_1]$

4) $F_4 \wedge u \in M_k \wedge \mathbb{M}[u] \rightarrow I^*[M_k, v_1]$ aus 1) 2) und 3)

5) $F_4 \wedge u \in M_k \wedge \mathbb{M}[u] \rightarrow I^*[M_k, v_2]$ analog wie 4)

6) $F_4 \rightarrow \mathfrak{F}[u]$ aus 5) mit Lemma 10

V.

1) $F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \rightarrow \mathfrak{F}[u]$ aus I. - IV.

2) $F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4$ verifizierbar

3) $\mathfrak{F}[u]$

Lemma 30.

$I_{k+1} \wedge u \in M_k \wedge s(u) \leq k \rightarrow I^*[M_k, u]$

Beweis.

Die behauptete Formel ist einfach. Man führt den Beweis wieder mit Hilfe der Regel (VI)' und verfährt dabei analog zu den Beweisen der Lemmata 13 und 24.

Lemma 31.

$I_{k+1} \rightarrow M_{k+1} = M_k$

Beweis.

1) $a \in M_k \wedge (u, a) \in K_k \rightarrow u \in M_k \wedge s(u) \leq k$ aus Lemma 1 (5) und verifizierbarer Formel

2) $I_{k+1} \wedge u \in M_k \wedge s(u) \leq k \rightarrow I^*[M_k, u]$ Lemma 30

3) $I_{k+1} \wedge a \in M_k \rightarrow ((u, a) \in K_k \rightarrow I^*[M_k, u]) \wedge a \in M_k$ aus 1) und 2)

4) $I_{k+1} \rightarrow a \in M_k \rightarrow a \in M_{k+1}$ aus 3)

5) $I_{k+1} \rightarrow a \in M_{k+1} \rightarrow a \in M_k$ Abschwächung von Lemma 1 (2)

6) $I_{k+1} \rightarrow M_{k+1} = M_k$ aus 5)

Lemma 32.

$$I_{k+1} \rightarrow I_k$$

Beweis.

Dies folgt sofort aus Lemma 31 und der Folgerung von §1.5.

Lemma 33.

$$I_0^N$$

Beweis.

Nach Lemma 22 gilt I_{N+1}^N . Daraus ergibt sich mit Hilfe von Lemma 32 die Behauptung durch $N+1$ -faches Anwenden des 'modus ponens'.

Ab[U,a] sei die Formel $\forall x(x \leq a \rightarrow x \in U)$.

Lemma 34.

$$Ab[U,a] \wedge u \leq a \wedge Q[U,V,u] \rightarrow Q[V,u]$$

Beweis.

- 1) $Ab[U,a] \wedge u \leq a \wedge v < u \rightarrow v \in U$ Def. von Ab[U,a] und verifiz. Formel
- 2) $Q[U,V,u] \wedge v \in U \wedge v < u \rightarrow v \in V$ herleitbare Formel
- 3) $Ab[U,a] \wedge Q[U,V,u] \wedge u \leq a \rightarrow v < u \rightarrow v \in V$ aus 1) und 2)
- 4) $Ab[U,a] \wedge Q[U,V,u] \wedge u \leq a \rightarrow Q[V,u]$ aus 3)

Lemma 35.

$$Ab[U,a] \wedge Pr[V] \rightarrow \forall x(x \leq a \wedge Q[U,V,x] \rightarrow x \in V)$$

Beweis.

- 1) $Pr[V] \wedge Q[V,u] \rightarrow u \in V$ herleitb. Formel
- 2) $Ab[U,a] \wedge Pr[V] \rightarrow u \leq a \wedge Q[U,V,u] \rightarrow u \in V$ aus 1) und Lemma 34
- 3) $Ab[U,a] \wedge Pr[V] \rightarrow \forall x(x \leq a \wedge Q[U,V,x] \rightarrow x \in V)$ aus 2)

Lemma 36.

$$I[U,a] \wedge \forall x(x \leq a \wedge Q[U,V,x] \rightarrow x \in V) \rightarrow Q[U,V,a]$$

Beweis.

- 1) $\forall x(x \leq a \wedge Q[U,V,x] \rightarrow x \in V) \wedge u \leq a \wedge Q[U,V,u] \rightarrow u \in V$ herlb. Formel

- 2) $\forall x(x \leq a \wedge Q[U, V, x] \rightarrow x \in V) \rightarrow (Q[U, V, u] \rightarrow u \in V) \vee a \leq u$ aus 1) mit der verifizierbaren Formel $a \leq u \vee u \leq a$
- 3) $Q[U, V, u] \wedge a \leq u \rightarrow Q[U, V, a]$ Lemma 2
- 4) $\forall x(x \leq a \wedge Q[U, V, x] \rightarrow x \in V) \rightarrow (Q[U, V, u] \rightarrow u \in V) \vee Q[U, V, a]$ aus 2), 3)
- 5) $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \text{Pr}[U, V] \vee Q[U, V, a]$ aus 4)
- 6) $I[U, a] \wedge \text{Pr}[U, V] \rightarrow Q[U, V, a]$ herleitbare Formel
- 7) $I[U, a] \wedge \forall x(x \leq a \wedge Q[U, V, x] \rightarrow x \in V) \rightarrow Q[U, V, a]$ aus 5) und 6)

Lemma 37.

$\text{Ab}[U, a] \wedge I[U, a] \rightarrow I[a]$

Beweis.

- 1) $\text{Ab}[U, a] \wedge I[U, a] \wedge \text{Pr}[V] \rightarrow Q[U, V, a]$ aus Lemma 35 und 36
- 2) $\text{Ab}[U, a] \wedge Q[U, V, a] \rightarrow Q[V, a]$ aus Lemma 34
- 3) $\text{Ab}[U, a] \wedge I[U, a] \rightarrow \text{Pr}[V] \rightarrow Q[V, a]$ aus 1) und 2)
- 4) $\text{Ab}[U, a] \wedge I[U, a] \rightarrow I[a]$ aus 3)

Satz.

Für jeden Ordinalterm $\alpha \in \Sigma$ der Stufe 0 ist $I[\varphi\alpha]$ in Π herleitbar.

Beweis.

Für $\alpha \in \Sigma$ gilt $\alpha \in \Sigma(R\alpha)$. Damit ist die Formel

- 1) $\varphi\alpha \in \Sigma_{R(\alpha)}$ verifizierbar.

Da die Terme von $\Sigma(R\alpha)$ der Stufe 0 einen Abschnitt der Terme von Σ der Stufe 0 bilden, ist auch die Formel

- 2) $a \leq \varphi\alpha \rightarrow a \in \Sigma_{R(\alpha)}$ verifizierbar.

Damit folgt

- 3) $\text{Ab}[\Sigma_{R(\alpha)}, \varphi\alpha]$.

Nach Lemma 33 gilt $I_0^{\Sigma_{R(\alpha)}}$ und damit insbesondere

- 4) $\varphi\alpha \in \Sigma_{R(\alpha)} \rightarrow I^*[\Sigma_{R(\alpha)}, \varphi\alpha]$. Aus 1) und 4) folgt aber

- 5) $I[\Sigma_{R(\alpha)}, \varphi\alpha]$. Mit 3) und Lemma 37 folgt dann die Behauptung.

Literaturverzeichnis

- [1] G.TAKEUTI: Consistency proofs of subsystems of classical analysis. Ann. Math. 82 (1967)
- [2] S.FEFERMAN: Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. Intuitionism and proof theory. Eds. A.KINO J.MYHILL North Holland Amsterdam (1970).
- [3] K.SCHÜTTE: Beweistheorie, Springer, Berlin (1960).
- [4] K.SCHÜTTE: Beweistheorie. Skriptum zur Vorlesung im WS 71/72 an der Universität München.
- [5] K.SCHÜTTE: Ein konstruktives System für Ordinalzahlen I u. II. Archiv f. math. Logik u. Grundlagenforschung 11 u. 12 (1969).
- [6] H.LEVITZ K.SCHÜTTE: A characterization of Takeuti's ordinal diagrams of finite order. Archiv f. math. Logik u. Grundlagenforschung 14 (1970).
- [7] H.LEVITZ: On the relationship between Takeuti's ordinal diagrams $O(n)$ and Schütte's system of ordinal notations $\Sigma(n)$. Intuitionism and proof theory. Eds. A.KINO J.MYHILL North Holland, Amsterdam (1970).
- [8] H.PFEIFFER: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Archiv für math. Logik und Grundlagenforschung 12 (1969).
- [9] H.PFEIFFER: Ein Bezeichnungssystem für Ordinalzahlen. Archiv für math. Logik und Grundlagenforschung 13 (1970).
- [10] G.TAKEUTI: Ordinal diagrams II. J. Math. Soc. Japan 12 (1960)

Lebenslauf

Ich wurde am 26. August 1943 in Leipzig geboren. Im Herbst 1950 begann ich mit dem Besuch der Volksschule in Wunsiedel/Oberfranken und wechselte noch im gleichen Schuljahr an die Volksschule an der Fürstrasse in München über. 1954 bestand ich die Aufnahmeprüfung am Wilhelmsgymnasium München, das ich bis 1956 besuchte. Ich trat dann an das neue Realgymnasium in München über, an dem ich 1964 die Reifeprüfung ablegte. Die darauf folgenden beiden Jahre verbrachte ich bei der Bundeswehr. Im Herbst 1966 begann ich das Studium der Mathematik an der Universität München, das ich am 30. März 1971 mit der Diplomprüfung abschloss. Seit dieser Zeit bin ich am mathematischen Institut der Universität München als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen ~~ben~~ Assistenten beschäftigt. Am 2. Februar 1970 heiratete ich Fräulein Renate Bley. Wir haben in der Zwischenzeit einen Sohn.

